Chapter 3

Series de potencia y Singularidades aisladas

3.1 Series de potencia

Recordemos la definición de convergencia uniforme de sucesiones de funciones.

Definición 14. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ y $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones de D en$\mathbb{C}$. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que la sucesión converge uniformamente a f ($f_n \rightrightarrows f$) si $||f_n - f||_\infty = sup\{|f_n(z) - f(z)| \; |z \in D\}$ converge a 0 si n tiende a ∞.*

Se sabe que si f_n es continua para todo n y $f_n \rightrightarrows f$, entonces f es continua.

Proposición 15. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un domino $f, f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, n = 0, 1, \ldots$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Sea γ un camino en D. Entonces*

$$lim_{n \longrightarrow \infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz \tag{3.1}$$

Demostración: Es inmediato pues dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $N \leq n$ implica $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{l(\gamma)}$ para todo $z \in D$, luego

$$\left| \int_\gamma (f_n(z) - f(z))dz \right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)||dz| \leq \frac{\varepsilon}{l(\gamma)} \int_\gamma |dz| = \varepsilon$$

□

Proposición 16. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un domino $(S - C)$, $f, f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, n = 0, 1, \ldots$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Si f_n es analítica en D para todo n entonces f es analítica en D y $f^{(k)}(z) = lim_{n \longrightarrow \infty} f_n^{(k)}(z)$ para todo $z \in D$ y todo $k = 0, 1, \ldots$*

Demostración: Sea γ un lazo en D entonces la proposición 8 implica que $\int_\gamma f_n(z)dz = 0$ para todo n luego la proposición 15 implica que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ y gracias a la proposición 14 f es analítica en D.

Ahora bien sea $z \in D, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ y sea $D' = D \setminus \overline{B(z, r)}$ para algún r tal que $\overline{B(z, r)} \subseteq D$. Sean $g, g_n : D' \longrightarrow \mathbb{C}, g_n(s) = \frac{f_n(s)}{(s-z)^{k+1}}, g(s) = \frac{f(s)}{(s-z)^{k+1}}$. Es inmediato que $g_n \rightrightarrows g$ en D'. Sea ξ un lazo en D' que de una vuelta alrededor de z en sentido antihorario. Se tiene

$$lim_{n\longrightarrow\infty} f_n^{(k)}(z) = lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\xi g_n(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\xi g(\zeta)d\zeta = f^{(k)}(z).$$

□

Definición 15. *Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos y $z_0 \in \mathbb{C}$. Definimos la serie de potencia centrada en z_0 dada por la sucesión como la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Proposición 17. *Sea $z, \in \mathbb{C}$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge. Luego para todo w tal que $|w-z_0| < |z-z_0|$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||(z-z_0)|^n$ converge.*

Demostración: Lo haremos para el caso $z_0 = 0$ y dejamos al alumno demostrar el caso general.

Supongamos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge. Esto significa que existe $M > 0$ tal que $|a_n||z|^n < M$ para todo n. Sea w tal que $|w| < |z|$, es decir $r = \frac{|w|}{|z|} < 1$, por lo que $\sum_{n=0}^{\infty} Mr^n$ converge, y como $|w|^n = r^n|z|^n < Mr^n$, por criterio de comparación $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||w|^n$ converge.

□

Proposición 18. *Para toda sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ y z_0 o bien la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z-z_0|^n$ converge en todo $\mathbb{C}$ o existe $R > 0$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z-z_0|^n$ converge para todo $z \in B(z_0, R)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ no converge para todo $z \in \overline{B(z_0,R)}^c$. R se llama el radio de convergencia de la serie, si la serie converge en todo $\mathbb{C}$ decimos que R es infinito.*

Demostración: Nuevamente lo haremos para el caso $z_0 = 0$. Supongamos que existe un complejo para el cual la serie no converge absolutamente.

Sea $R = sup\{r \in \mathbb{R} \mid$ la serie converge absolutamnte para todo z tal que $|z| < R\}$. Es evidente que para todo $w \in B(z_0, R)$ la serie converge absolutamente. Sea w tal que $|w| > R$ si la serie converge en w entonces por la proposición 17 la serie converge absolutamente para todo $z \in B(z_0, |w|)$ lo que contradice la maximalidad de R.

□

Proposición 19. *Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sucesión y $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que el radio de la serie que definen es R. Entonces para todo $r < R$, si definimos $s_n : \overline{B(z_0,r)} \longrightarrow \mathbb{C}, s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ y $s : \overline{B(z_0,r)} \longrightarrow \mathbb{C}, s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, tenemos que $s_n \rightrightarrows s$.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Sea $z_1 \in \mathbb{C}$ para el cual $|z_1 - z_0| = r$, como $r < R$ las serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z_1-z_0|^n$ converge. Luego existe N tal que para todo $k > N$ la serie $\sum_{n=k}^{\infty} |a_n||z_1-z_0|^n < \varepsilon$. Luego

$$sup_{z\in\overline{B(z_0,r)}}|s(z) - s_k(z)| = sup_{z\in\overline{B(z_0,r)}}\left|\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right|$$

$$sup_{z\in\overline{B(z_0,r)}}\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n||z-z_0|^n \leq \sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n||z-z_0|^n < \varepsilon.$$

□

Ejercicio 14. Demuestre que una serie de potencia centrada en z_0 y de radio de convergencia R la función $f : B(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es analítica se puede integrar y diferenciar termino a término. Además $a_n = f^{(n)}(z_0)/n! = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ donde γ es un lazo en $B(z_0, R)$ que da una vuelta alrededor de z_0 en sentido antihorario.

Ejemplo 10. Sea $a_n = 1$ para todo n y $z_0 = 0$. Tenemos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Como para $z = 1$ no converge $r \leq 1$ pero si $|z| < 1$ entonces la serie es absolutamente convergente entonces $R = 1$. Entonces $f : B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Es una función analítica su derivada es $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n + 1z^n$. Una primitiva es $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}z^n$. Es inmediato ver que estas funciones corresponden a $f(z) = \frac{1}{1-z}, f'(z) = \frac{-1}{(1-z)^2}, F(z) = -log(1-z)$.

Es importante ver que dada una serie centrada en z_0 con radio de convergencia R no se sabe que ocurre en borde es decir en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$. En los ejemplos siguientes vemos que tenemos tres distintas situaciones.

Ejemplo 11.

1. Consideremos la serie del ejemplo anterior $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ Tiene radio 1 y si $|z| = 1$ si la serie converge para z entonces grecias al ejercicio 6 tenemos que $lim_{n\longrightarrow\infty} z^n = 0$, pero $|z|^n = 1$ para todo n por lo que obtenemos una contradicción. Por ello la serie no converge en ningún punto del borde.

2. Consideremos ahora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}z^n$. También tiene radio 1 y la proposición 20 más adelante dice que converge para todo z tal que $|z| = 1 \wedge z \neq 1$.

3. Por último consideremos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}z^n$ tenemos que si $|z| = 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}|z|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge para todo z en el borde.

Proposición 20. *(Criterio de abel) Considere la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con radio de convergencia 1, tal que para todo n, a_n es un real positivo y las sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie converge para todo $z \neq 1$*

Demostración: Dado N natural y $z = e^{i\theta}$, con $\theta \in (0, 2\pi)$, sea $S_N(z) = \sum_{n=0}^{n} a_n z^n$. Tenemos que si llamamos $z^{\frac{1}{2}}$ a $e^{\frac{i\theta}{2}}$, se tiene $z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}} = 2isen(\frac{\theta}{2}) \neq 0$. Entonces para dos naturales $N > M$ se tiene

$$2isen\left(\frac{\theta}{2}\right)(S_N(z) - S_M(z)) = \left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\sum_{n=M+1}^{N} a_n z^n\right) = \sum_{n=M+1}^{N} a_n(z^{n+\frac{1}{2}} - z^{n-\frac{1}{2}})$$

$$= a_N z^{N+\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=M+1}^{N}(a_{n-1} - a_n)z^{n-\frac{1}{2}}\right) - a_{M+1}z^{M+\frac{1}{2}}$$

Por lo que

$$\left|2isen\left(\frac{\theta}{2}\right)\right||S_N(z) - S_M(z)| \leq a_N + \left(\sum_{n=M+1}^{N}(a_{n-1} - a_n)\right) - a_{M+1}$$

$$= a_N + a_{M+1} - a_N + a_{M+1} = 2a_{M+1}$$

Luego

$$\begin{tikzcd} 0 \leq \arrow[dr, "M\longrightarrow\infty"'] & |S_N(z) - S_M(z)| \leq \arrow[d, "M\longrightarrow\infty"] & \leq \frac{a_{M+1}}{|sen(\frac{\theta}{2})|} \arrow[dl, "M\longrightarrow\infty"] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

Se obtiene que la sucesión $S_N(z)$ es de Cauchy por lo que converge.

3.2 Series de Taylor y Series de Laurent

Definición 16. *Sea D un dominio, sea $z_0 \in D$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica en D definimos la serie de Taylor de f en z_0 como la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Si $z_0 = 0$ la serie de Taylor se llama serie de M^cLaurin.

Es claro que el término n-ésimo a_n de la serie de Taylor cumple

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

donde γ es una camino en D que da una vuelta alrededor de z_0 en sentido antihorario. Es claro que esta serie tiene un radio de convergencia. Pero además se cumple.

Proposición 21. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$ sea $f : B(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor de f en z_0 es mayor que R y*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \ \forall\, z \in B(z_0, R).$$

Demostración: Sea $z \in B(z_0, R)$ y sea r un real tal que $|z - z_0| < r < R$. Tomemos el camino $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$. Es claro que para todo t se tiene $|\gamma(t) - z_0| = r$ y γ da un vuelta alrededor de z. Por ello

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \right) \left(\frac{1}{1 - w} \right) d\zeta$$

donde $w = \frac{z - z_0}{s - z_0}$. Tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n \right) d\zeta$$

pues $|w| < 1$. Como en la bola $B(0,1)$ gracias a la proposición 19 la serie geométrica converge uniformemente, la proposición 15 nos permite sacar el límite de la integral. Asi se tiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \right) w^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n.$$

es decir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

□

Ejemplo 12. La función de los reales a los reales que vale 0 en 0 y $e^{-\frac{1}{x^2}}$ en $x \neq 0$ cumple que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n luego su serie de M^cLaurin es la trivial y tiene radio de convergencia infinito, pero no converge a la función en ningún punto salvo cero. Esto no puede ocurrir para funciones de variable compleja, pue la proposición 21 dice que si la serie de taylor converge entonces converge a la función.

Definición 17. *Sea D un dominio, $z_0 \in D$ y $f : D \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica. Decimos entonces que z_0 es una singularidad aislada de f. Decimos que la singularidad aisladca z_0 es*

1. *Una singularidad reparable si existe $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \neq z_0$.*
2. *Un polo si no existe $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \neq z_0$, y existe n natural tal que para la función $(z - z_0)^n f(z)$ tiene una singularidad reparable en z_0. Al mínimo de tales n le llamamos el orden del polo z_0. Un polo de orden 1 se llama un polo simple.*
3. *Una singularidad escencial si $(z - z_0)^n f(z)$ no tiene una singularidad reparable en z_0 para todo n natural o cero.*

Ejemplo 13. Considere:

1. Sea $f(z) = \frac{1}{z^k}$ con dominio en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tiene un polo de orden k en 0.
2. Sea $f(z) = \frac{z-i}{z^2+1}$ con dominio $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Tiene un polo simple en $-i$ y una singularidad reparable en i.
3. Sea $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ con dominio en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tiene una singularidad escencial en 0.

Definición 18. *Sea D un dominio, sea $z_0 \in D$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica en $D \setminus \{z_0\}$ con una singularidad aislada en z_0. Definimos la serie de Laurent de f en z_0 como la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{1=\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}.$$

Donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \wedge b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z - z_0)^{n-1} dz$$

donde γ es una camino en D que da una vuelta alrededor de z_0 en sentido antihorario.

Definimos para n entero $c_n = a_n$ si $n \geq 0$ y $c_n = b_{-n}$ si $n < 0$. En este caso se obtiene que la serie de Laurent de f en z_0 es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Proposición 22. *(Teorema de Laurent) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea $f : B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica con una sigularidad aislada en z_0. Entonces*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \ \forall\, z \in B(z_0, R).$$

Demostración: Demostremoslo para $z_0 = 0$. Sea ξ un lazo en $B(0, R)$ que da una vuelta alrededor de z en sentido antihorario tal que $0 \in E(\xi)$. Sean μ y ν dos lazos en $B(0, R)$ tales que cada uno da una vuelta alrededor de 0 en sentido antihorario y tales que $\xi([0,1]) \cup \gamma([0,1]) \subseteq I(\mu)$ y $\xi([0,1]) \cup \gamma([0,1]) \subseteq E(\nu)$. Es sencilo ver que

$$\int_\nu \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_\xi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_\mu \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

por lo que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\mu \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_\nu \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\mu \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} d\zeta + \int_\nu \frac{f(\zeta)}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} d\zeta \right) \end{aligned}$$

Como para todo t tenemos que si $\zeta \in \nu([0,1])$ entonces $\left|\frac{\zeta}{z}\right| < 1$ y si $\zeta \in \mu([0,1])$ entonces $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$ deducimos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\mu \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n d\zeta + \int_\nu \frac{f(\zeta)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n d\zeta \right)$$

Debido a la proposición 15 podemos cambiar la serie ycon la integral y tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\mu \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\nu \frac{f(\zeta)}{z} d\zeta \right) \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\mu \frac{f(\zeta)}{(\zeta)^{n+1}} d\zeta \right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\nu f(\zeta)\zeta^{n-1} d\zeta \right) \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n. \end{aligned}$$

Ejemplo 14.

1. Sea $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Tenemos que f tiene una singulardad aislada en 0. Tenemos que $\frac{1}{z} \in D$ donde la exponencial es analítica. Entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ con $c_n = \frac{1}{(-n)!}$ si $n \leq 0$ y $c_n = 0$ si $0 < n$.

2. Sea $D = \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z}$ tiene un polo de orden 1 en 0 tenemos que si $z \neq 0$ entonces $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1+z}$ por lo que $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ es la serie de Lorentz de f en 0 y su radio de convergencia es 1.

3. Es inmediato que si f tiene una singularidad reparable en z_0 entonces la serie de Laurent y la serie de Taylor de f en z_0 coninciden .

3.3 Residuos e integración

Definición 19. *Sea D un dominio, $z_0 \in D$ y $f : D \setminus \{z_0\}$ analítica. Sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ su serie de Laurent en z_0. Definimos el residuo de f en z_0 como*

$$Res(f, z_0) = c_{-1}.$$

Ejemplo 15.

1. Sea D y f como en el ejemplo 14 parte 1, tenemos que $c_n = \frac{1}{(-n)!}$ si $n \leq 0$ y $c_n = 0$ si $0 < n$ por lo que $Res(f, 0) = 1$.

2. Sea D y f como en el ejemplo 14 parte 2, tenemos que $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ es la serie de Lorentz de f en 0 por lo que $Res(f, 0) = 1$.

3. Es obvio que si f tiene una singularidad reparable en z_0, entonces $Res(f, z_0) = 0$.

Para calcular residuos en polos es posible usar el siguiente método. Supongamos que f tiene un polo simple en z_0. Esto significa que la funicón que lleva a z en $(z - z_0)f(z)$ tiene una singularidad reparable en z_0. Sea g su reparada, como es anĺitica en un entorno de z_0 escribimos su serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=n}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Tenemos que para todo $z \neq z_0$ se cumple $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=n}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, es la serie de Laurent de f en z_0. Por lo tanto $Res(f, z_0) = a_0 = g(z_0) = lim_{z \longrightarrow z_0}(z - z_0)f(z)$.

Ejemplo 16. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} \mid im(z) > 0\}$. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$. Existe un polo simple de f en $3i$. Luego $Res(f, 3i) = lim_{z \longrightarrow 3i}(z - 3i)\frac{z+1}{z^2+9} = lim_{z \longrightarrow 3i} \frac{z+1}{z+3i} = \frac{3-i}{6}$

El resultado anteior se puede extender a polos de orden n.

Ejercicio 15. Demuestre que si f tiene un polo de orden n en z_0 y g es la reparada de $(z - z_0)^n f(z)$ entonces $Res(f, z_0) = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$.

Dada la fórmula (3.2) se deduce que si f tiene una singularidad aislada en z_0 y γ es un lazo que da una vuelta alrededor de z_0 en sentido antihorario y no hay otra singularidad de f en $I(\gamma)$ entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i Ref(f, z_0) \tag{3.3}$$

Por lo que tenemos el resultado

Proposición 23. *(Teorema los residuos de Cauchy) Sea D un dominio y $f : D \setminus K \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica con K un conjunto discreto de singularidades aisladas. Sea γ un lazo en D que no pasa por los puntos de K y por cada z en $I(z)$ γ da una vuelta alrededor de z en sentido antihorario. Sea $\{z_1, \dots z_n\} = K \cap I(\gamma)$. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res(f, z_k) \tag{3.4}$$

Demostración: La demostracón es inmediata de 3.4 y del hecho que podemos escribir $\gamma = \gamma_1 \bullet \gamma_2 \bullet \cdots \bullet \gamma_n$ donde γ_k da una vuelta alrededor de z_i en sentido antihorario y $\{j \in \{1, \dots, n\} \mid z_j \in I(\gamma_k)\} = \{j\}$. Luego

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=0}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res(f, z_k).$$

□

Veamos alguna aplicaciones del teorema. podemos calcular algunas integrales impropias. Consideremos una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ par, es decir que satisface $f(x) = f(-x)$ entonces tenemos que la integral impropia $\int_0^\infty f(x)dx$ existe si y sólo si existe el valor principal de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es decir $lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$, en cuyo caso el segundo es el doble del primero.

Ejemplo 17. 1. Calculemos

$$\int_0^\infty \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

Como la función $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}$ es par basta con calcular el valor principal $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ y dividir por 2.

Definamos la función

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i, -1, 2i, -2i\} \longrightarrow \mathbb{C},\ f(z) = \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4}$$

Sea R un real positivo mayor que 2. Definamos los caminos $\gamma_R : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = 2tR - R$ y $\xi_R : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \xi_R(t) = Re^{\pi i t}$. El primero va de $-R$ a R por el intervalo $[-R, R]$ y el segundo va de R a $-R$ por el semicirculo de radio R y parte imaginaria positiva. Luego $\gamma_R \bullet \xi_R$ es un lazo que da una vuelta alrededor de i (también de $2i$.) Por ello

$$\int_{\gamma_R \bullet \xi_R} f(z)dz = 2\pi i(Res(f, i) + Res(f, 2i))$$

Como ambos son polos simples calculamos los residuos usando el ejemplo 16. Se tiene

$$Res(f, i) = \lim_{z \longrightarrow i} \frac{(z - i)2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} = \lim_{z \longrightarrow i} \frac{2z^2 - 1}{(z + i)(z^2 + 4)} = \frac{-3}{6i} = \frac{i}{2}$$

y

$$Res(f, 2i) = \lim_{z \longrightarrow i} \frac{(z-2i)2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} = \lim_{z \longrightarrow i} \frac{2z^2 - 1}{(z+2i)(z^2+1)} = \frac{9}{12i} = \frac{-3i}{4}$$

Entonces

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\xi_R} f(z)dz = 2\pi i \left(\frac{i}{2} + \frac{-3i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Luego se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi}{2} - lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{\xi_R} f(z)dz$$

probaremos que $lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{\xi_R} f(z)dz = 0$.

Si z pertenece a la imagen de γ_R entonces $|z| = R$ luego $|2z - 1| \leq 2R + 1$ además $|z^4 + 5z + 4| = |z^2 + 4||z^2 + 1| \geq |R^2 - 1||R^2 - 4|$. Además $l(\gamma_R) = 2\pi R$. Finalmente se tiene que

$$\begin{tikzcd}
0 \leq \arrow[dr, "R\longrightarrow\infty"'] & \left| \int_{\gamma} \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4} dz \right| \arrow[d, "R\longrightarrow\infty"] & \leq \frac{2\pi R(R^2+1)}{(R^2-1)(R^2-4)} \arrow[dl, "R\longrightarrow\infty"] \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

Concluímos que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4}$$

2. Demostremos que

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{1 + asen(\theta)} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

si $-1 < a < 1$. Si $a = 0$, la fórmula es evidentemente válida. Sea $a \neq 0$. Si F es una de dos variable podemos y $g(\theta) = F(cos(\theta), sent(\theta))$ tenemos que si llamamos $z = e^{i\theta,}$ entonces $cos(\theta) = \frac{z+z^{-1}}{2}$ $sen(\theta) = \frac{z-z^{-1}}{2i}$. Luego si definimos $f(z) = F(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i})$ se tiene que

$$\int_{0}^{2\pi} g(\theta)d\theta = \int_{E_{1,1}} \frac{f(z)}{iz} dz$$

por lo que la integral que queremos calcular es

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{2/a}{z^2 + (2/ia)z - 1} dz$$

Esta función tiene dos polos simples, $z_1 = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{|a|}$ y $z_2 = \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{|a|}$. Ahora bien $|z_2| = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{|a|} > 1$ luego como $|z_1 z_2| = 1$ tenemos que sólo z_1 pertencece a la región interior al lazo. Por lo que la integral que buscamos es

$2\pi i Res(f,z_1)$. Tenemos que $(z-z_1)f(z)=\frac{2/a}{(z-z_2)}$ por lo que el residuo vale $\frac{2/a}{z_1-z_2}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$. Finalmente tenemos que

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+asen(\theta)}d\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

3.4 Ceros y polos

Ejercicio 16. Sea f analítica en un domino D y sea $z_0\in D$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equvalentes

1. $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots f^{(m-1)}(z_0)=0$ pero $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.
2. La serie de Taylor de f en z_0 es $\sum_{n=m}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$.
3. $f(z)=(z-z_0)^{m-1}g(z)$ donde g es una función analítica en D tal que $g(z_0)\neq 0$.
4. La funci1ón $\frac{1}{f}$ tiene un polo de orden m en z_0.

Definición 20. *Sea f analítica en un domino D y sea $z_0\in D$ tales que se cumple cualquiera de las cuatro afirmaciones del ejercicio 16. Entonces decimos que f tiene un cero de orden m en z_0. Decimos que es cero es aislado si no hay otros ceros en un entorno de z_0.*

Ejercicio 17. Dado $r>0, z_0\in\mathbb{C}$. Sean $f,g:B(z_0,r)\longrightarrow\mathbb{C}$ analíticas tal que f tiene un cero aislado de orden n y g tiene un cero aislado de orden m en z_0. Demuestre que f/g

1. Tiene un polo de orden $m-n$ si $n<m$.
2. Tiene una singularidad reparable si $m\leq n$.
3. La reparada de f/g tiene un cero de orden $n-m$ si $m<n$.

Para demostrar la proposición 24 que está más adelante debemos estudiar la integral sobre γ de f'/f donde γ da una vuelta en sentido antihorario alrededor de un z_0 cuando este z_0 es cero y cuando es polo.

Sea z_0 un cero de orden m aislado y supongamos γ en la vecindad donde no hay otro cero ni polo. Entonces $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$ con g analítica sin ceros en $I(\gamma)$. Luego $f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}g(z)+(z-z_0)^m g'(z)$ Por lo que

$$\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_\gamma\frac{m}{(z-z_0)}dz+\int_\gamma\frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

Como g'/g es analítica en $I(\gamma)$ entonces la segunda integral del lado derecho es cero luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_\gamma\frac{m}{(z-z_0)}dz=m \tag{3.5}$$

Sea z_0 un polo de orden n aislado y supongamos γ en la vecindad donde no hay otro cero ni polo. Entonces $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ con g analítica sin ceros en $I(\gamma)$. Luego

$$f'(z) = \frac{(z-z_0)^n g'(z) - n(z-z_0)^{n-1}g(z)}{(z-z_0)^{2n}} = \frac{g'(z)}{(z-z_0)^n} - \frac{ng(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Por lo que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz - \int_\gamma \frac{n}{(z-z_0)}dz$$

Como nuevamente g'/g es analítica en $I(\gamma)$ entonces la segunda integral del lado derecho es nuevamente cero, luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_\gamma \frac{-n}{(z-z_0)}dz = -n \tag{3.6}$$

Definición 21. *Sea D un dominio y sea f una función que es analítica en $D \setminus X$ donde X es un subconjunto discreto de D. Si en cada punto de X f tiene un polo. Entonces decimos que f es meromorfa en D.*

Proposición 24. *(Principio del argumento) Sea f meromorfa en un dominio $D(S-C)$ y sea γ un lazo en D tal que $n(\gamma, z) = 1,\ \forall\ z \in I(\gamma)$. Sea $\{z_1, \ldots, z_k\}$ el conjunto de polos de f en $I(\gamma)$ tal que el orden de z_j es $n_j,\ \forall\ j \in \{1, \ldots, k\}$. Sea $\{w_1, \ldots, w_l\}$ el conjunto de ceros de f en $I(\gamma)$ tal que el orden de w_j es $m_j,\ \forall\ j \in \{1, \ldots, l\}$. Entonces se tiene que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{l} m_j - \sum_{j=1}^{k} n_j \tag{3.7}$$

Demostración: Podemos definir un conjunto de curvas $\nu_j, j \in \{1, \ldots, k\}, \mu_j, j \in \{1, \ldots, l\}$ tales que la curva ν_j da una vuelta alrededor del polo z_j y μ_j da una vuelta alrededor del cero w_j, y que además γ es el producto de los μ_j y los ν_j en algún orden. Luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{l}\int_{\mu_j} \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{k}\int_{\nu_j} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{l} m_j - \sum_{j=1}^{k} n_j$$

$\square$

Proposición 25. *(Teorema de Rouché) Sea f y g dos funciones analíticas en un dominio D y sea γ un lazo en D tal que $n(\gamma, z) = 1,\ \forall\ z \in I(\gamma)$ y ni f ni g tiene ceros en la imagen de γ. Supongamos que se tiene que para todo z en la imagen de γ se cumple que $|g(z)| < |f(z)|$. Entonces el número de ceros de f en $I(\gamma)$ es igual al número de ceros de $f - g$ en $I(\gamma)$.*

Demostración: Sea $h = 1 - g/f$ tenemos que para todo z en la imagen de γ, $|h(z) - 1| = |g(z)/f(z)| < 1$ por que $h(z)$ pertenece al dominio simplemente conexo $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Luego aplicando (3.5) y (3.6) se tiene

$$\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz = \int_{h\circ\gamma} \frac{1}{w}dw = 0$$

Luego la porposición 4 dice que la suma de losordenes de los ceros de h en $I(\gamma)$ es igual a la suma de los ordenes de los polos de h en $I(\gamma)$. Finalmente gracias al ejercicio 17 tenemos que el número de ceros de $f - g$ en $I(\gamma)$ es igual al número de ceros de f en $I(\gamma)$.

$\square$

La proposición 25 permite demostrar el siguiente importantísimo teorema que se deja como ejercicio.

Ejercicio 18. (Teorema fundamental del álgebra) Sea p un polinomio en $\mathbb{C}[z]$. Entonces la suma de las multiplicidades de los ceros de p es igual al grado de p. En particular existen ceros de p si $deg(p) \neq 0$.