

Ejercicio en clases:

¿ Cuántos números naturales hay que

- Al dividirlo por 77 deja resto 18
- Al dividirlo por 104 deja resto 7 ?

Solución: Un número con tales propiedades se escribe de las siguientes maneras

$$1) n = 77q_1 + 18$$

$$2) n = 104q_2 + 7$$

Al multiplicar la primera igualdad por 104 y la segunda por 77, obtenemos

$$1') 104n = 8008q_1 + 1872$$

$$2') 77n = 8008q_2 + 539$$

Es posible encontrar $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a104 + b77 = 1$$

Usando el algoritmo de la división de Euclides

Usando el algoritmo se obtiene lo siguiente

$$\begin{array}{l} \underline{1)} \quad 104 : 77 = 1 \quad \Rightarrow \quad 104 = 77 \cdot 1 + 27 \\ \quad - \underline{77} \\ \quad \quad 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{2)} \quad 77 : 27 = 2 \quad \Rightarrow \quad 77 = 27 \cdot 2 + 23 \\ \quad - \underline{54} \\ \quad \quad 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{3)} \quad 27 : 23 = 1 \quad \Rightarrow \quad 27 = 23 \cdot 1 + 4 \\ \quad - \underline{23} \\ \quad \quad 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{4)} \quad 23 : 4 = 5 \quad \Rightarrow \quad 23 = 4 \cdot 5 + 3 \\ \quad - \underline{20} \\ \quad \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{5)} \quad 4 : 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 = 3 \cdot 1 + 1 \\ \quad - \underline{3} \\ \quad \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{6)} \quad 3 : 1 = 3 \\ \quad \quad 0 \end{array}$$

Por el algoritmo de la división sabemos que

$$\text{mcd}(104, 47) = 1$$

Esto es un "BONUS TRACK":

Veamos cómo determinar $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a \cdot 104 + b \cdot 47 = 1.$$

Del penúltimo paso del algoritmo tenemos que

$$4 = 3 \cdot 1 + 1. \quad (1)$$

Del paso anterior tenemos que $23 - 4 \cdot 5 = 3$. Reemplazando en (1) obtenemos

$$\begin{aligned} 4 &= (23 - 4 \cdot 5) \cdot 1 + 1 \\ &= 23 - 4 \cdot 5 + 1, \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$-23 + \frac{4 \cdot 5 + 4}{4 \cdot 6} = 1,$$

$\Leftrightarrow$

$$-23 + 4 \cdot 6 = 1.$$

Nuevamente, desde el paso anterior, tenemos $27 - 23 = 4$. Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} -23 + (27 - 23) \cdot 6 &= 1 \\ 27 \cdot 6 - 23 \cdot 6 & \end{aligned}$$

Desarrollando obtenemos

$$27 \cdot 6 - 23 \cdot 7 = 1. \quad (2)$$

Procedemos de la misma manera. Del paso 2) obtenemos
 $77 - 27 \cdot 2 = 23$. Reemplazando en lo anterior (1)
resulta:

$$27 \cdot 6 - (77 - 27 \cdot 2) \cdot 7 = 1.$$
$$- 77 \cdot 7 + 27 \cdot 14$$

Desarrollando obtenemos

$$- 77 \cdot 7 + 27 \cdot 20 = 1.$$

Del paso 1) obtenemos: $104 - 77 \cdot 1 = 27$. Reemplazando
obtenemos

$$- 77 \cdot 7 + (104 - 77) \cdot 20 = 1$$
$$+ 104 \cdot 20 - 77 \cdot 20$$

Desarrollando obtenemos

$$- 77 \cdot 27 + 104 \cdot 20 = 1.$$

Así, $a = 20$ y $b = -27$ satisfacen la condición

$$a \cdot 104 + b \cdot 77 = 1.$$

Recordemos que buscamos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1') 104n = 8008q_1 + 1872$$

$$2') 77n = 8008q_2 + 539$$

Multiplicando la primera ecuación por 20 y la segunda por (-27) obtenemos

$$1'') 2080n = 8008(20q_1) + 37440$$

$$2'') -2079n = 8008(-27q_2) - 14553$$

Sumando, obtenemos

$$n = 8008(20q_1 - 27q_2) + 22887. \quad (3)$$

Notemos que $22887 > 8008$ y que

$$22887 = 8008 \cdot 2 + 6871. \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (3) se obtiene

$$n = 8008(20q_1 - 27q_2 + 2) + 6871.$$

Uno de los números que satisface la condición es
 6871 .

Notemos que todo número de la forma

$$8008 \cdot k + 6871 \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

satisface la condición.