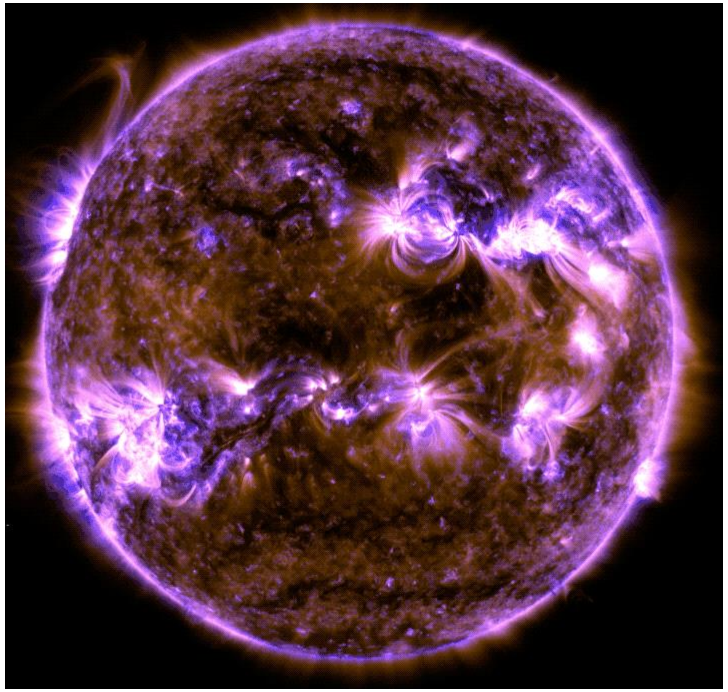
FÍSICA 02

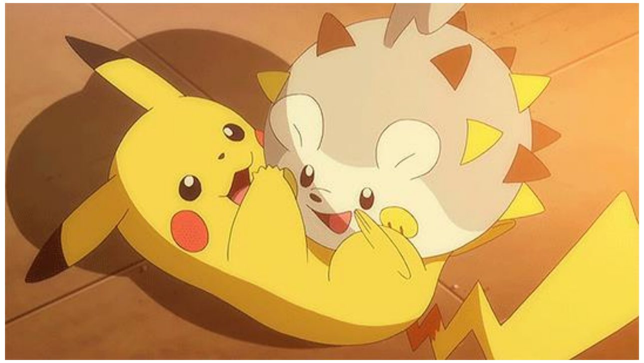
Clase 17: Fuentes de campo Magnético.



Profesor: Mirko Mol

OBJETIVOS DE LA CLASE

I. Ley de Biot-Savart
II. Relación entre la corriente y el campo magnético.
III. Fuerza magnética entre conductores.
IV. Ley de Ampere

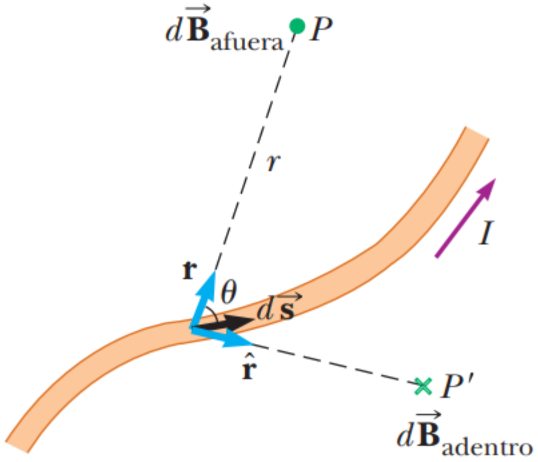


LEY DE BIOT-SAVART.

Dos científicos franceses Biot y Savart realizaron experimentos en los cuales querían determinar la fuerza que ejercía una corriente eléctrica sobre un imán cercano.

Sus resultados se pueden sintetizar en la siguiente expresión:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

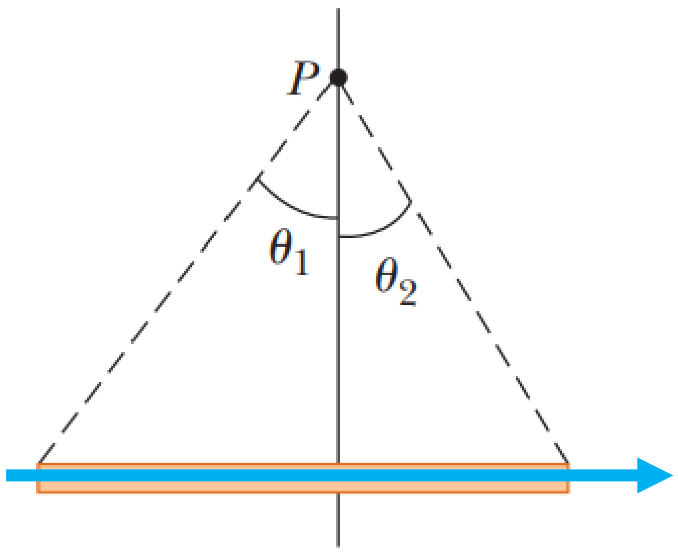


Donde μ_0 es la permeabilidad magnética del espacio libre.
Donde $d\vec{s}$ corresponde a la dirección que sigue la corriente por el conductor. El vector $\hat{r}$ es la dirección del $d\vec{s}$ hasta el punto P, lugar donde queremos saber el valor del campo magnético y finalmente r es la distancia entre el $d\vec{s}$ y el punto P.

Notemos que la expresión es para un trozo del circuito, por lo tanto, si queremos saber el valor del campo debemos integrar la expresión anterior:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

EJEMPLO RESUELTO 036.



Considere un alambre finito por el cual circula una corriente I a lo largo del eje $\hat{x}$. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P que se encuentra a una distancia a debido a esta corriente.

Solución:

En primer lugar, como tenemos una corriente y queremos saber el valor del campo magnético vamos a utilizar la ley de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Debido a la forma en que circula la corriente tenemos lo siguiente:

$$d\vec{s} = dx\,\hat{x}$$

Notemos que el $\hat{r}$ está en el plano, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\hat{x} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\hat{y} \\ &= \sin(\theta)\,\hat{x} + \cos(\theta)\,\hat{y}\end{aligned}$$

EJEMPLO RESUELTO 036.

Lo que implica que:

$$d\vec{s} \times \hat{r} = dx\cos(\theta)\,\hat{z}$$

Por lo tanto, tenemos que la magnitud del campo magnético se puede expresar como:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_{-\theta_1}^{0} \frac{dx\cos\theta}{r^2} + \int_{0}^{\theta_2} \frac{dx\cos\theta}{r^2}\right]$$

Ahora, fijémonos que necesitamos una relación angular entre las variables, por lo que vamos a calcular algunos términos que nos faltan en función del ángulo:

$$r = \frac{a}{\cos\theta}$$

Por otra parte, tenemos que para un determinado θ:

$$x = a\tan\theta$$

Lo que implica que:

$$dx = a\sec^2\theta \;\; d\theta$$

$$dx = \frac{a d\theta}{\cos^2\theta}$$

EJEMPLO RESUELTO 036.

Por lo tanto, tenemos que la magnitud del campo magnético se puede expresar como:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{a \cos\theta \cos^2\theta \, d\theta}{a^2 \cos^2\theta}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4a\pi} \left[\int_{-\theta_1}^{0} \cos\theta \;\, d\theta + \int_{0}^{\theta_2} \cos\theta \;\, d\theta \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4a\pi} (\sin\theta_2 - \sin -\theta_1)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4a\pi} (\sin\theta_2 + \sin\theta_1)$$

Por lo tanto, el campo magnético se puede expresar como:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4a\pi} (\sin\theta_2 + \sin\theta_1) \; \hat{z}$$

EJEMPLO RESUELTO 037.

¿Qué sucede ahora, si el alambre del ejemplo anterior se hace infinitamente larga?

Solución:

Consideremos ahora que el alambre es infinitamente largo, esto indica que:

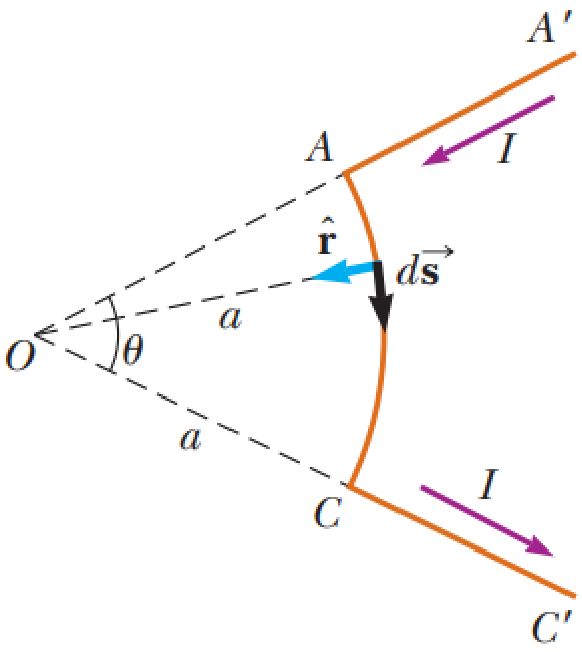
$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

Reemplazando en la expresión obtenida del problema anterior:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a\pi}\ \hat{z}$$

EJEMPLO RESUELTO 038.



Considere un alambre como el de la figura, por el cual circula una corriente I. Determine el campo magnético.

Solución:

Separamos el alambre en 3 partes, las partes rectas y la parte curva. Para las partes rectas, el campo producido por ellos en el punto O es 0.

Ahora para la parte curva, utilizamos la Ley de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}_h}{r^2}$$

Dada la geometría del problema:

$$d\vec{s} = ds\,(-\hat{\theta})$$
$$\hat{r}_h = -\hat{r}$$

EJEMPLO RESUELTO 038.

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

$$d\vec{s} \times \hat{r}_h = -ds\ \hat{z}$$

La magnitud del campo magnético es:

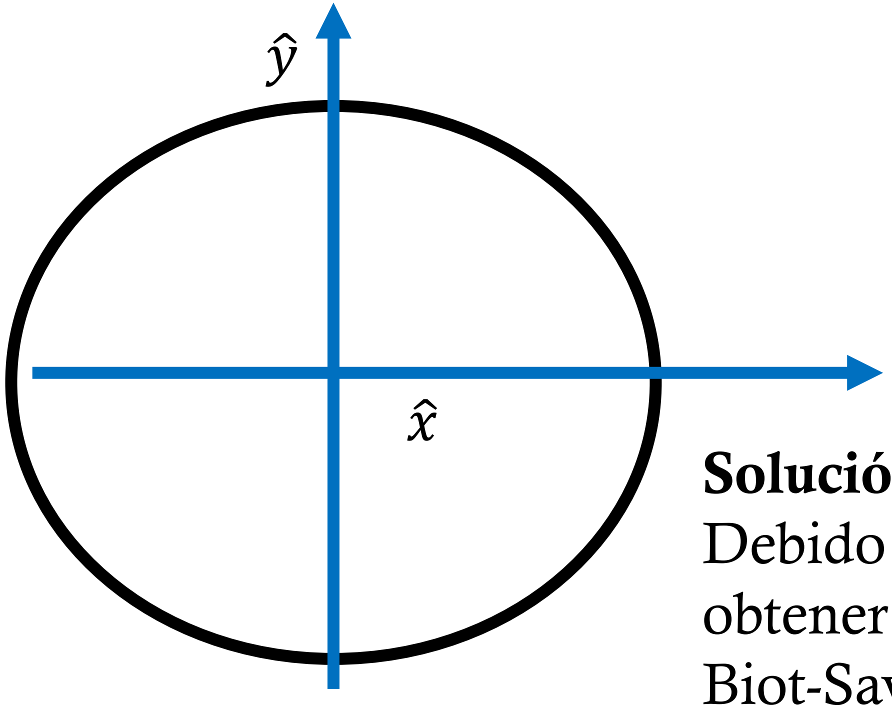
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds}{a^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} a\theta$$

Finalmente, el campo magnético es:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\theta\ \hat{z}$$

EJEMPLO RESUELTO 039.



Considere una espira circular de radio R por la cual circula una corriente de valor I en el sentido antihorario.

Determine el valor del campo magnético en el punto $\overrightarrow{r_p} = z\,\hat{z}$

Solución:
Debido a que tenemos una corriente circulando y queremos obtener el valor del campo magnético, vamos a ocupar la ley de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s} \times \widehat{r_h}}{r^2}$$

EJEMPLO RESUELTO 039.

Encontremos el valor de $\widehat{r_h}$, igual que hacíamos con la distribución de carga, tenemos que:

$$\overrightarrow{r_h} = \vec{r}_p - \overrightarrow{r_i}$$
$$= z\hat{z} - R\cos\theta\,\hat{x} - R\sin\theta\;\hat{y}$$

Por lo tanto, el vector unitario es:

$$\widehat{r_h} = \frac{z\hat{z} - R\cos\theta\,\hat{x} - R\sin\theta\;\hat{y}}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$
$$= r_x\;\hat{x} + r_y\,\hat{y} + r_z\hat{z}$$

Por otra parte, determinemos el valor de $\overrightarrow{ds}$:

$$\overrightarrow{ds} = ds\;(\hat{\theta})$$
$$\overrightarrow{ds} = Rd\theta(-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y})$$

EJEMPLO RESUELTO 039.

Realizando el producto cruz:

$$\overrightarrow{ds} \times \hat{r} = Rd\theta \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

$$= Rd\theta\left[\hat{x}(\cos\theta\, r_z) - \hat{y}(-\sin\theta\, r_z) + \hat{z}\left(-r_y \sin\theta - r_x\cos\theta\right)\right]$$

Finalmente tenemos que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(I_x + I_y + I_z\right)$$

Donde:

$$I_x = \int_0^{2\pi} \frac{R r_z \cos\theta\, d\theta}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \hat{x}$$

$$I_y = \int_0^{2\pi} \frac{R r_z \sin\theta\, d\theta}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \hat{y}$$

EJEMPLO RESUELTO 039.

$$I_z = \int_0^{2\pi} \frac{(R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta)\, d\theta}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \hat{z}$$

Resolviendo integrales:

$$I_x = \frac{Rr_z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\ \ \hat{x}$$

$$I_x = 0$$

$$I_y = \frac{Rr_z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\ \ \hat{y}$$

$$I_y = 0$$

EJEMPLO RESUELTO 039.

Finalmente, para $\hat{z}$:

$$I_z = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \hat{z}$$

$$= \frac{2\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \hat{z}$$

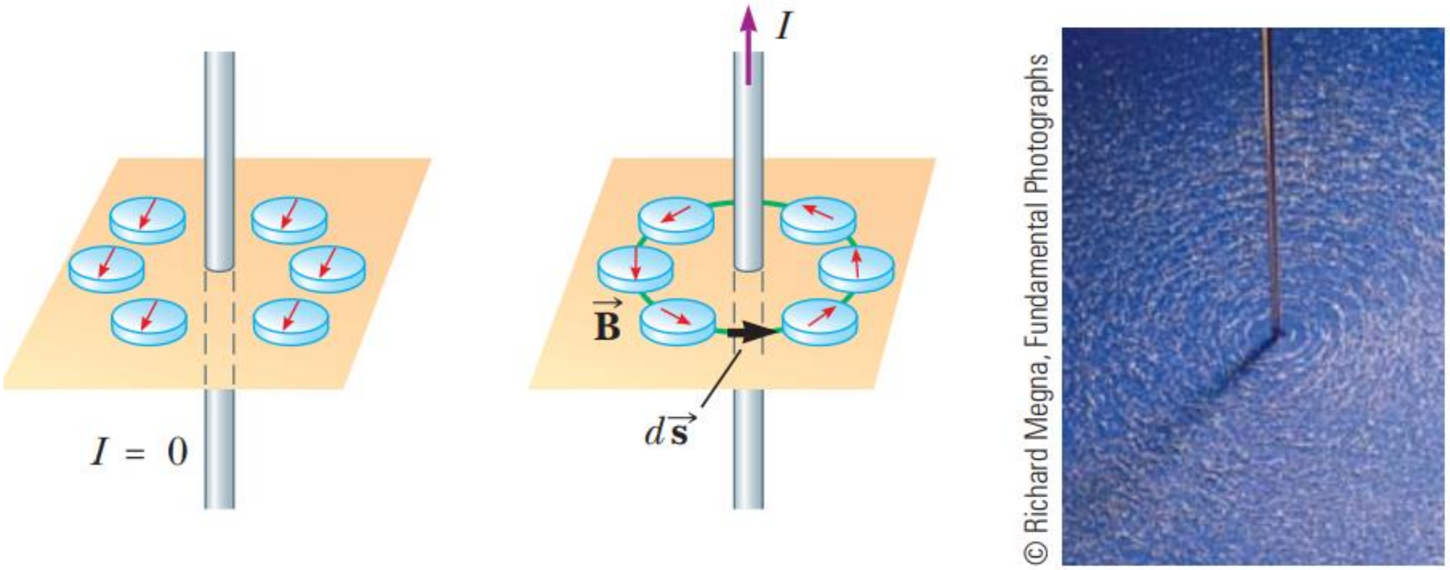
Lo que implica que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \hat{z}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \hat{z}$$

LEY DE AMPÈRE

Experimentalmente se ha observado que por un cable por el cual circula una corriente, en torno a dicho cable, las brújulas se reorientan formando un círculo.



Debido a que las agujas se orientan siguiendo las líneas de campo, se concluye que las líneas de $\vec{B}$ forman círculos alrededor del alambre, como calculamos anteriormente. Además, por simetría la magnitud de $\vec{B}$ es la misma en cualquier parte de la circunferencia, al variar la corriente aumenta B y si aumenta la distancia al alambre disminuye su magnitud.

LEY DE AMPÈRE

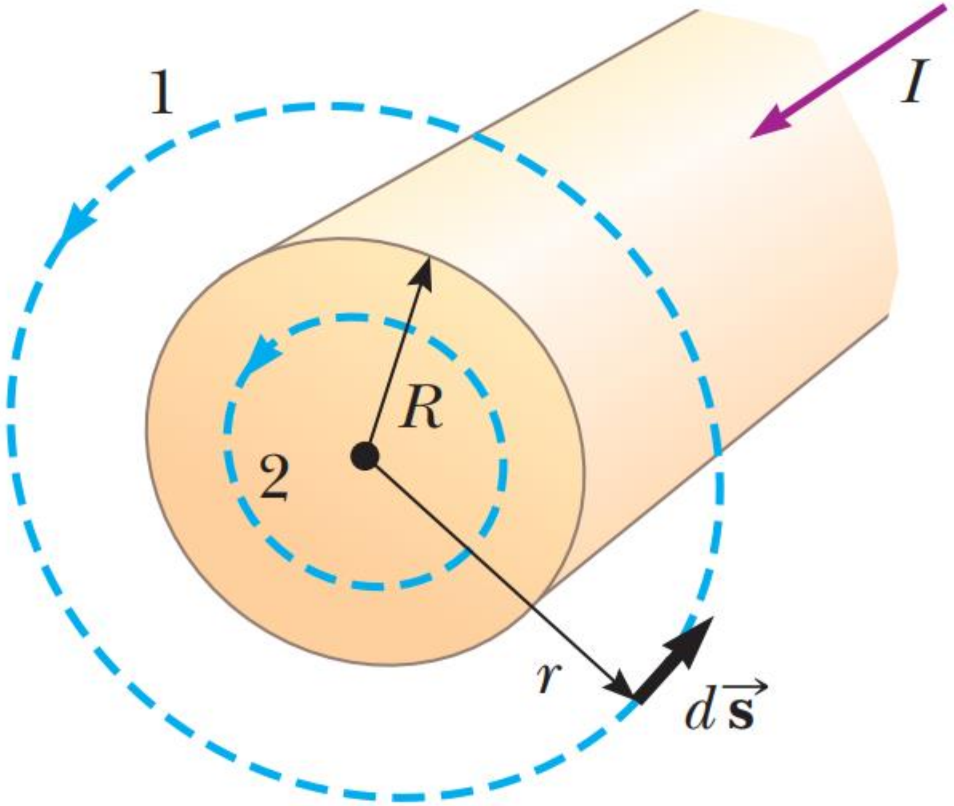
La ley de Ampère se puede enunciar de la siguiente forma:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I_{enc}$$

Que indica que la integral de línea de $\vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a $\mu_0 I$, donde I es la corriente total que pasa a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria cerrada.

Hay muchos problemas que se pueden resolver ahora, pero dada la orientación del curso solo vamos a calcular campos magnéticos con corrientes que tienen un alto grado de simetría.

EJEMPLO RESUELTO 040.



Un alambre largo recto de radio R porta una corriente estable I que se distribuye uniformemente a través del alambre.
Calcule el campo magnético a una distancia $r \leq R$ y $R > r$.

Solución:
Debida a la alta simetría del problema, vamos a utilizar la ley de Ampère, que nos indica lo siguiente:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I_{enc}$$

EJEMPLO RESUELTO 040.

Vamos a calcular primero la región en que $r > R$:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B \oint ds = \mu_0 I$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

EJEMPLO RESUELTO 040.

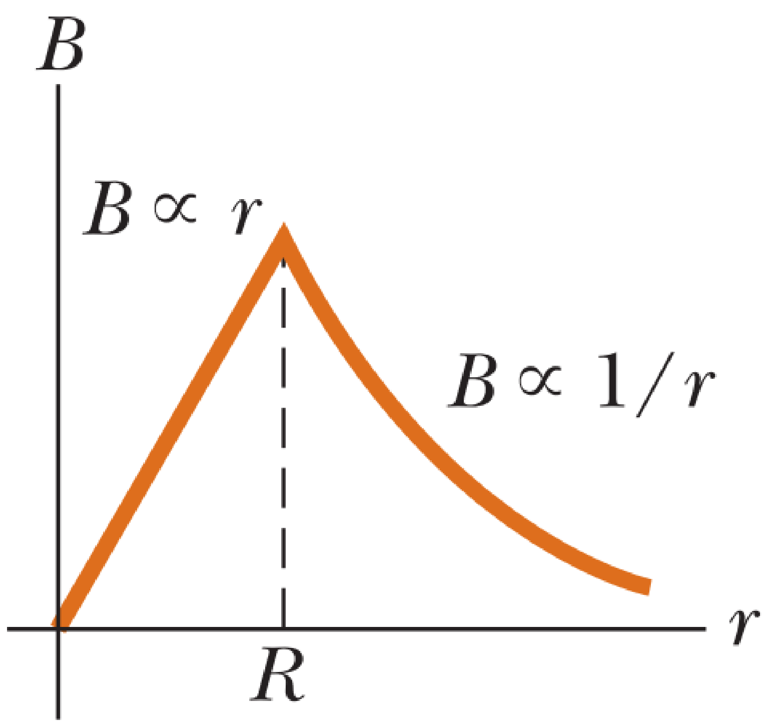
Vamos a calcular primero la región en que $r \leq R$:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I_{enc}$$

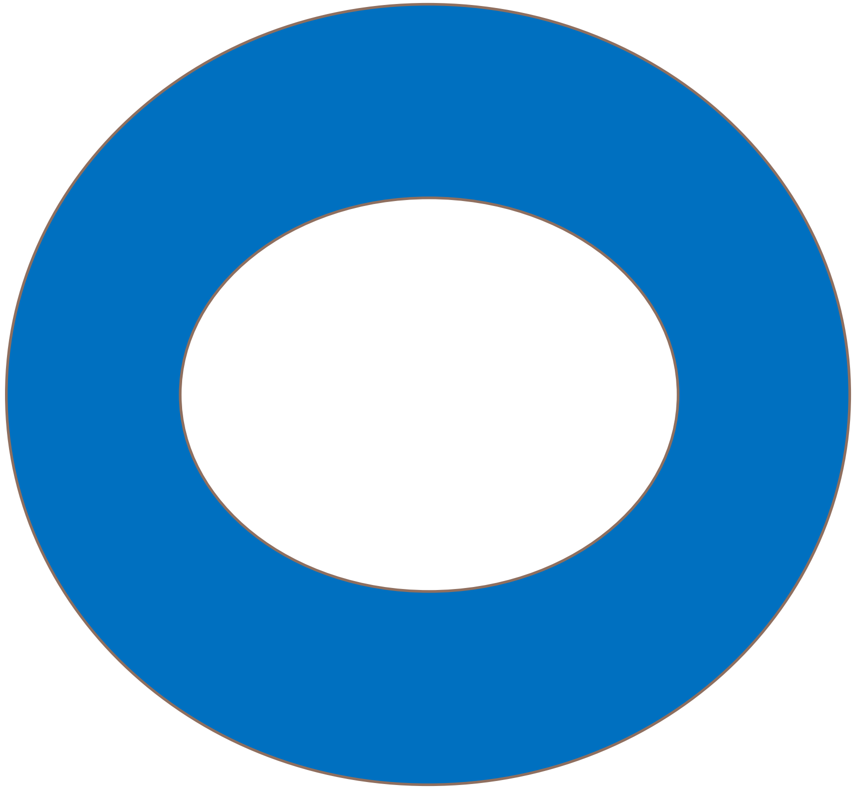
$$B \oint ds = \mu_0 J A_{enc}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{I}{\pi R^2}\right) \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$



EJEMPLO RESUELTO 041.



Considere el disco de la figura el cual representa la sección transversal de un cilindro, en el que el radio externo es b y el radio interno es a. Si por el disco fluye una corriente I saliendo de la pantalla, determine el campo magnético que se genera.

Solución:
Debida a la alta simetría del problema, vamos a utilizar la ley de Ampère, que nos indica lo siguiente:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I_{enc}$$

Debemos considerar las siguientes 3 regiones para determinar el campo magnético que se genera; la región I que corresponde a $r \leq a$, la región II que corresponde a $a \leq r \leq b$ y la región III que corresponde a $r \geq b$.

EJEMPLO RESUELTO 041.

Para la región I, tenemos que la corriente en esa zona es nula, por lo tanto:

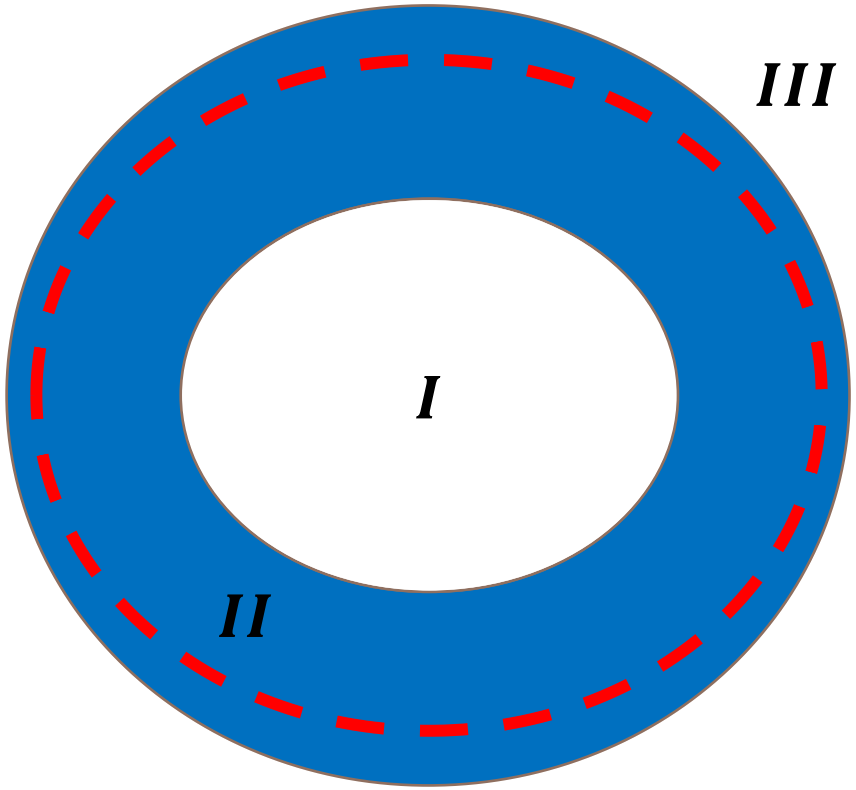
$$B = 0$$

Para la región II, tenemos que la corriente en esa zona es proporcional a la cantidad de área que tomemos del disco, por lo tanto:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I_{enc}$$

Por una parte, suponiendo una superficie de ampere de radio r entre los radios a y b, podemos resolver la izquierda de la integral:

$$B \oint ds = B(2\pi r)$$



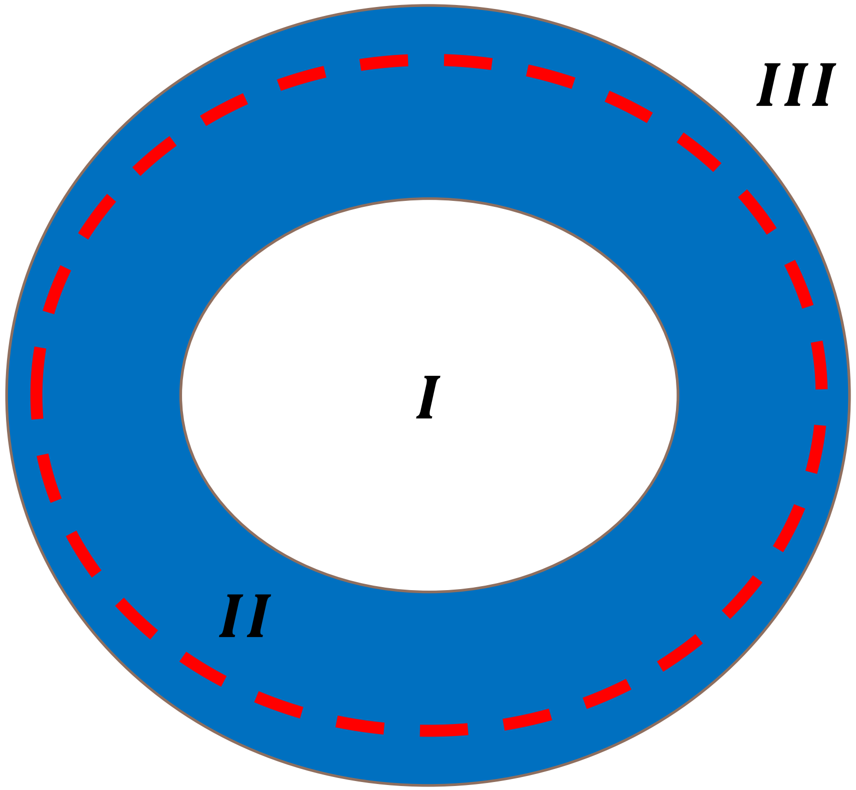
EJEMPLO RESUELTO 041.

Ahora, resolviendo la parte derecha de la ley de ampere:

$$\mu_0 I_{enc} = \mu_0 J A_{enc}$$

$$= \mu_0 \left(\frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}\right) \pi(r^2 - a^2)$$

$$= \mu_0 I \frac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$



Uniendo ambas partes de la ecuación:

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$

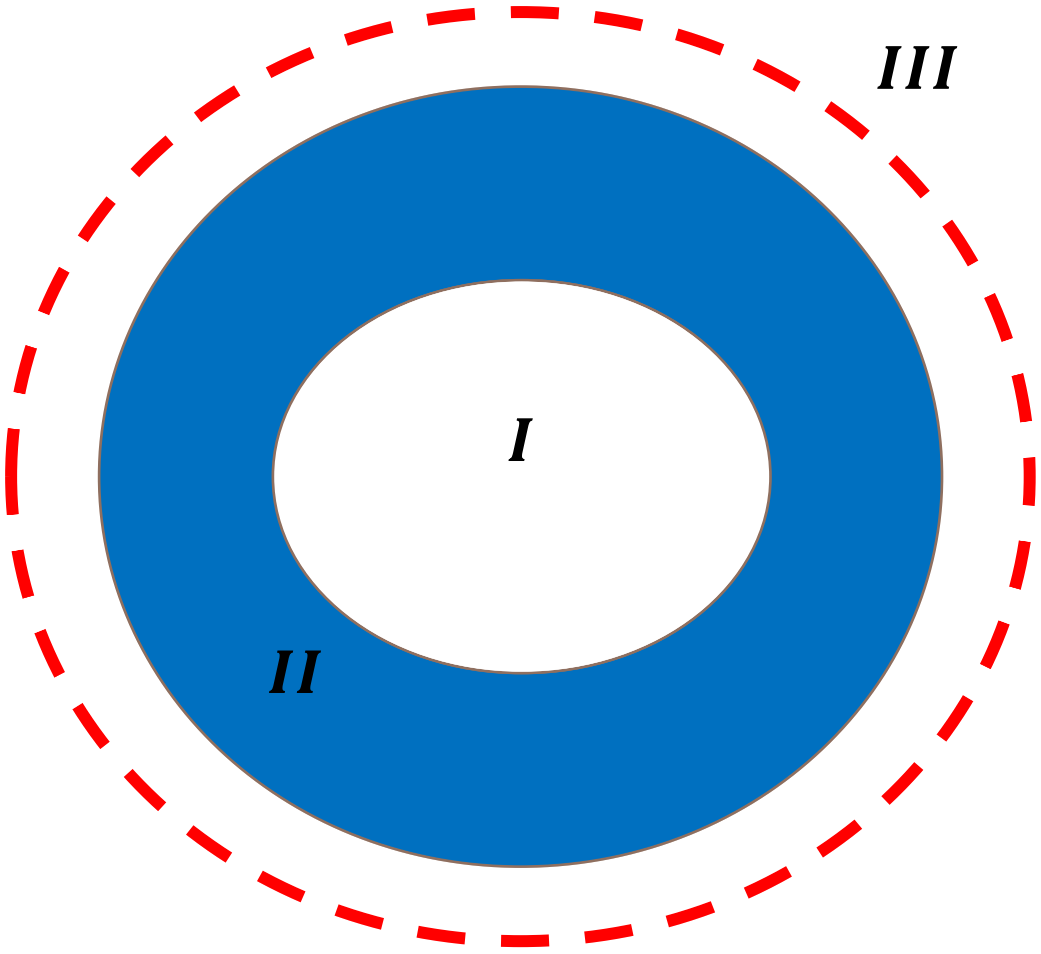
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$

EJEMPLO RESUELTO 041.

Finalmente, para la tercera región si tomamos una superficie amperiana de radio $r > b$, podemos resolver la izquierda de la integral de la ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = B \oint ds$$

$$= B(2\pi r)$$



Ahora, resolviendo la parte derecha de la ley de ampere:

$$\mu_0 I_{enc} = \mu_0 I$$

Igualando ambos términos:

$$B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \mathrm{r}}$$

EJEMPLO RESUELTO 041.

Por lo que podemos escribir el campo magnético generado por este disco como:

$$\vec{B} = \begin{cases} 0\,\hat{\theta}, & r < a \\ B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}\hat{\theta}, & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi \mathrm{r}}\hat{\theta}, & r > b \end{cases}$$