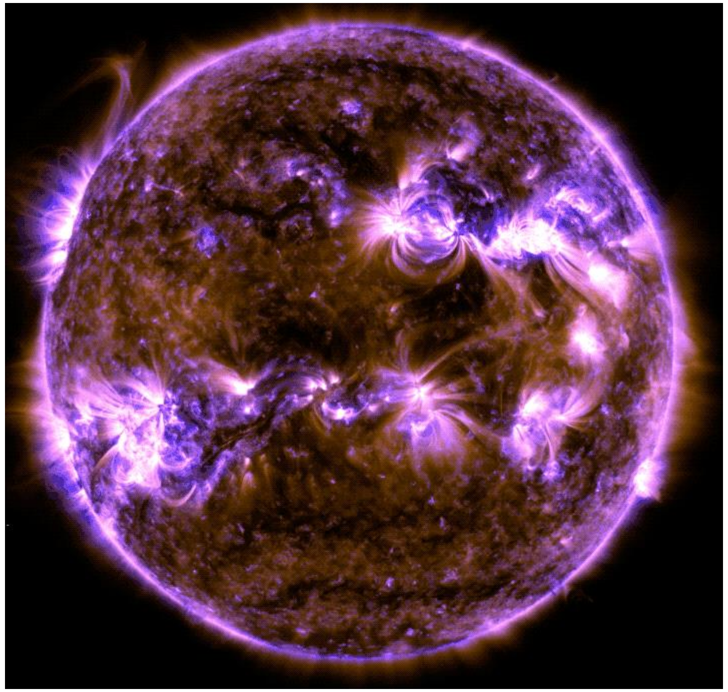
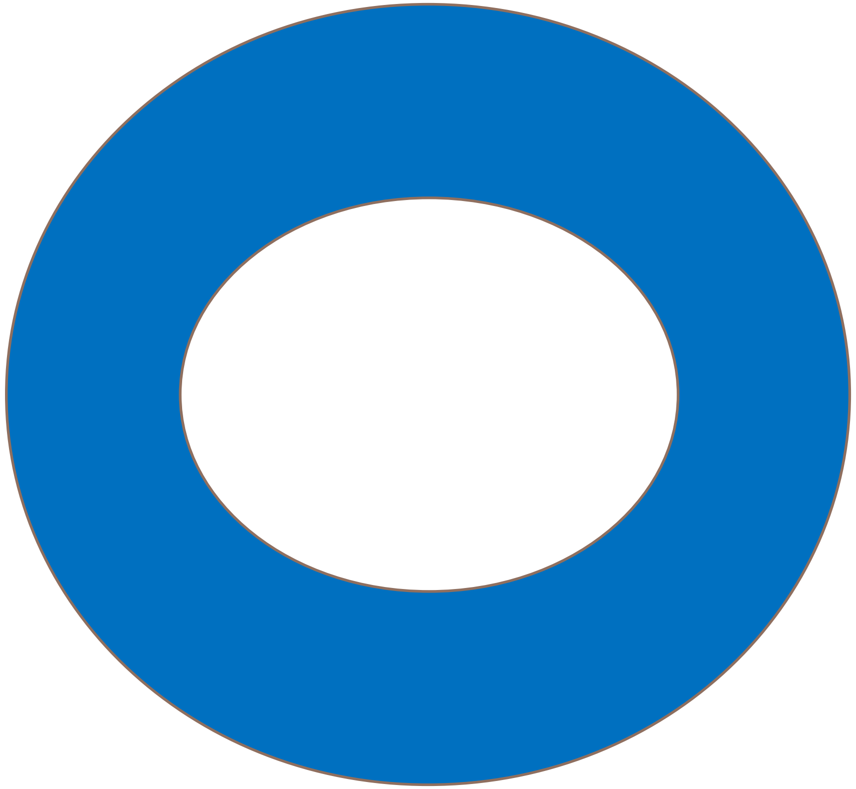
FÍSICA 02

Clase 20: Campos debido a densidad de corriente variable.



Profesor: Mirko Mol

EJEMPLO RESUELTO 041.



Considere el disco de la figura el cual representa la sección transversal de un cilindro, en el que el radio externo es b y el radio interno es a. Si por el disco fluye una corriente I saliendo de la pantalla, determine el campo magnético que se genera.

Solución:
Debida a la alta simetría del problema, vamos a utilizar la ley de Ampère, que nos indica lo siguiente:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I_{enc}$$

Debemos considerar las siguientes 3 regiones para determinar el campo magnético que se genera; la región I que corresponde a $r \leq a$, la región II que corresponde a $a \leq r \leq b$ y la región III que corresponde a $r \geq b$.

EJEMPLO RESUELTO 041.

Para la región I, tenemos que la corriente en esa zona es nula, por lo tanto:

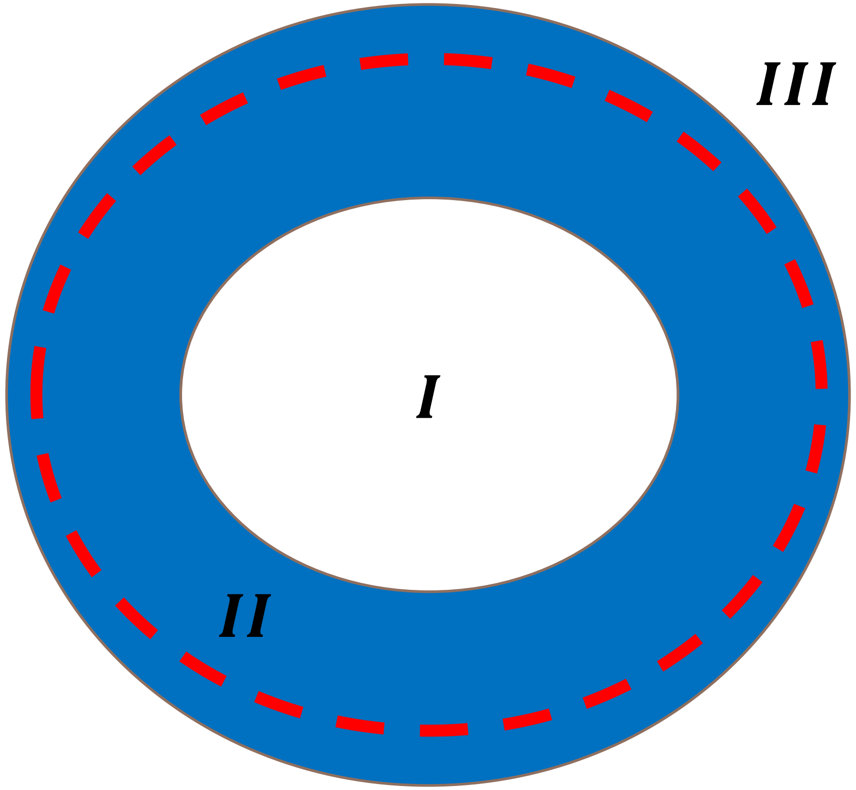
$$B = 0$$

Para la región II, tenemos que la corriente en esa zona es proporcional a la cantidad de área que tomemos del disco, por lo tanto:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I_{enc}$$

Por una parte, suponiendo una superficie de ampere de radio r entre los radios a y b, podemos resolver la izquierda de la integral:

$$B \oint ds = B(2\pi r)$$



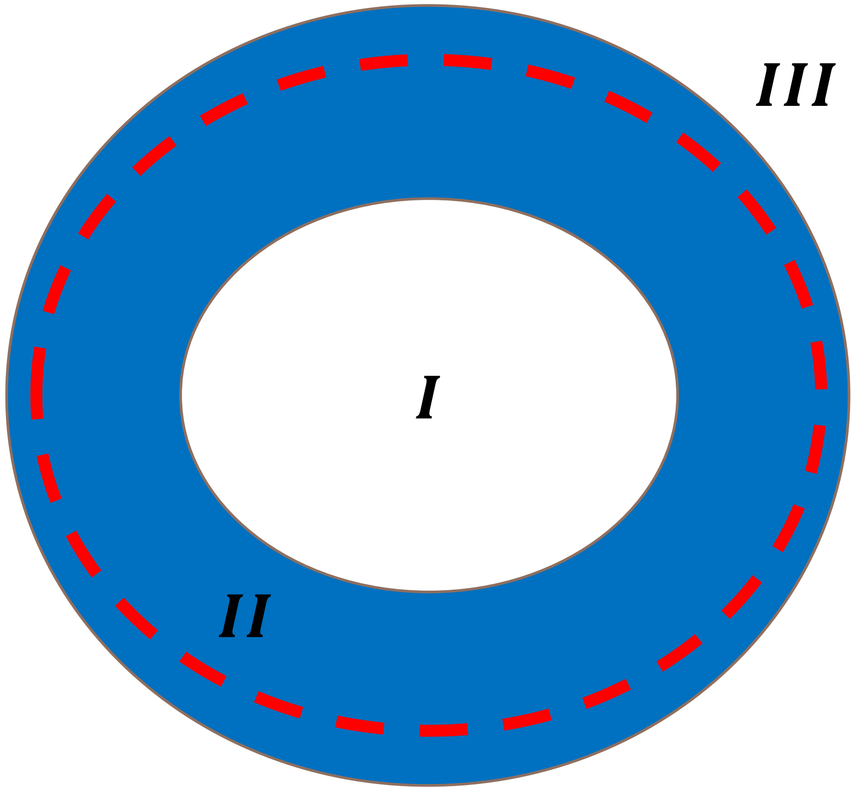
EJEMPLO RESUELTO 041.

Ahora, resolviendo la parte derecha de la ley de ampere:

$$\mu_0 I_{enc} = \mu_0 J A_{enc}$$

$$= \mu_0 \left(\frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}\right)\pi(r^2 - a^2)$$

$$= \mu_0 I \frac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$



Uniendo ambas partes de la ecuación:

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$

EJEMPLO RESUELTO 041.

Finalmente, para la tercera región si tomamos una superficie amperiana de radio $r > b$, podemos resolver la izquierda de la integral de la ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = B \oint ds$$

$$= B(2\pi r)$$

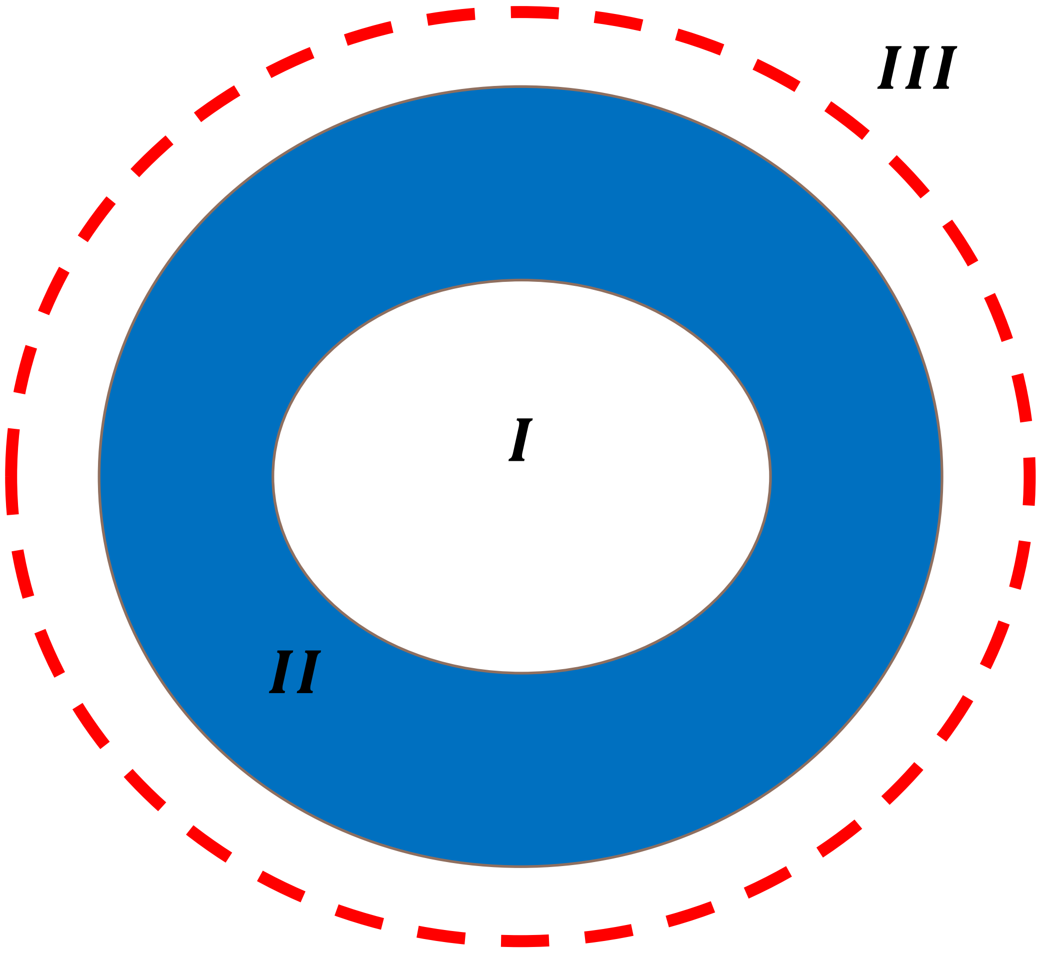
Ahora, resolviendo la parte derecha de la ley de ampere:

$$\mu_0 I_{enc} = \mu_0 I$$

Igualando ambos términos:

$$B2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \mathrm{r}}$$



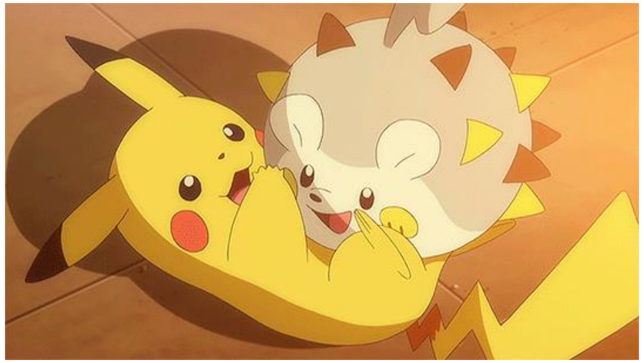
EJEMPLO RESUELTO 041.

Por lo que podemos escribir el campo magnético generado por este disco como:

$$\vec{B} = \begin{cases} 0\,\hat{\theta}, & r < a \\ B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}\hat{\theta}, & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi \mathrm{r}}\hat{\theta}, & r > b \end{cases}$$

OBJETIVOS DE LA CLASE

I. Ley de Ampere con densidad de corriente variable.



DENSIDAD DE CORRIENTE.

Como sabemos, la densidad de corriente corresponde a la razón entre la cantidad de corriente sobre el espacio en el cual se mueven los portadores de carga.

De manera general podemos escribir:

$$I = \int_{\Omega} J \, d\Omega$$

Hasta ahora hemos descrito problemas en los cuales la corriente se distribuye uniformemente sobre el cuerpo, lo que implica que J es constante.
Considerando lo anterior en la integral, obtenemos:

$$I = J \int_{\Omega} d\Omega$$

$$I = J \, \Omega$$

DENSIDAD DE CORRIENTE.

Por ejemplo, consideremos el caso de un cilindro muy largo de radio a el cual tiene una densidad de corriente J uniformemente distribuida. Obtengamos el valor de la corriente:

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} J \, da$$

$$I = J \int_0^a \int_0^{2\pi} r dr d\theta$$

$$I = J\pi a^2$$

Un resultado similar obtuvimos en un problema anterior.

DENSIDAD DE CORRIENTE.

Debido a impurezas en los materiales o dopamientos, muchas veces la densidad de corriente no es constante, por lo tanto, encontrar la corriente se trata de resolver la integral de la densidad de corriente.

$$I = \int_{\Omega} J(\Omega)\, d\Omega$$

EJEMPLO RESUELTO 042.

Consideremos el caso de un cilindro muy largo de radio a el cual tiene una densidad de corriente $J(\theta) = J_0\theta^n$. Obtengamos el valor de la corriente:

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} J(\theta)\, rdrd\theta$$

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} J_0\theta^n\, rdrd\theta$$

$$I = J_0 \int_0^a rdr \int_0^{2\pi} \theta^n d\theta$$

$$I = J_0 \frac{a^2}{2}\, \frac{2^{n+1}\pi^{n+1}}{n+1}$$

EJEMPLO RESUELTO 043.

Consideremos el caso de un cilindro muy largo de radio a el cual tiene una densidad de corriente $J(\theta) = J_0 \ \sin^2 \theta$. Obtengamos el valor de la corriente:

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} J(\theta) \, r dr d\theta$$

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} J_0 \sin^2 \theta \ r dr d\theta$$

$$I = J_0 \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta$$

$$I = J_0 \ \frac{a^2}{2} \ \pi$$

LEY DE AMPÈRE

Ahora, recordemos la ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enc}$$

Si tenemos un cuerpo por el cual circula una corriente con densidad de corriente variable, podemos escribir la ley de Ampere de la siguiente forma:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \int_{\Omega} J(\Omega) d\Omega$$

EJEMPLO RESUELTO 044.

Consideremos el caso de un cilindro muy largo el cual tiene radio a y una densidad de corriente $J(\theta) = J_0 \sin^2 \theta$. Obtengamos el valor del campo magnético en todo el espacio.

Primero para la zona de $r > a$:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \int_{\Omega} J(\theta)\, d\Omega$$

Resolviendo la parte izquierda:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = B(2\pi r)$$

Para la parte derecha, considerando el problema que ya resolvimos:

EJEMPLO RESUELTO 044.

Para la parte derecha, considerando el problema que ya resolvimos:

$$\mu_0 \int_{\Omega} J(\theta) d\theta = \mu_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} J(\theta)\, r dr d\theta$$

$$= \mu_0 J_0 \frac{a^2}{2} \pi$$

Igualando ambas partes:

$$B(2\pi r) = \mu_0 J_0 \pi \frac{a^2}{2}$$

$$B = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{4r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{4r}\ \hat{\theta}$$

EJEMPLO RESUELTO 044.

Para la zona de $a > \bar{r}$:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \int_{\Omega} J(\theta)\, d\Omega$$

Resolviendo la parte izquierda:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = B(2\pi\bar{r})$$

Para la parte derecha, obtengamos la corriente encerrada por la superficie:

$$I = \int_0^{\bar{r}} \int_0^{2\pi} J_0 \sin^2\theta \;\, r dr d\theta$$

$$I = J_0 \pi \frac{\bar{r}^2}{2}$$

EJEMPLO RESUELTO 044.

Igualando ambos términos:

$$B(2\pi\bar{r}) = \mu_0 J_0 \pi \frac{\bar{r}^2}{2}$$

$$B = \frac{\mu_0 J_0\ \bar{r}}{4}$$

$$\vec{B} = \mu_0 J_0 \frac{\bar{r}}{4}\ \ \hat{\theta}$$

Escribiendo el campo eléctrico:

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 J_0 a^2}{4r}\ \ \hat{\theta}, & si\ r > a \\ \dfrac{\mu_0 J_0 r}{4}\ \ \hat{\theta}, & si\ r < a \end{cases}$$