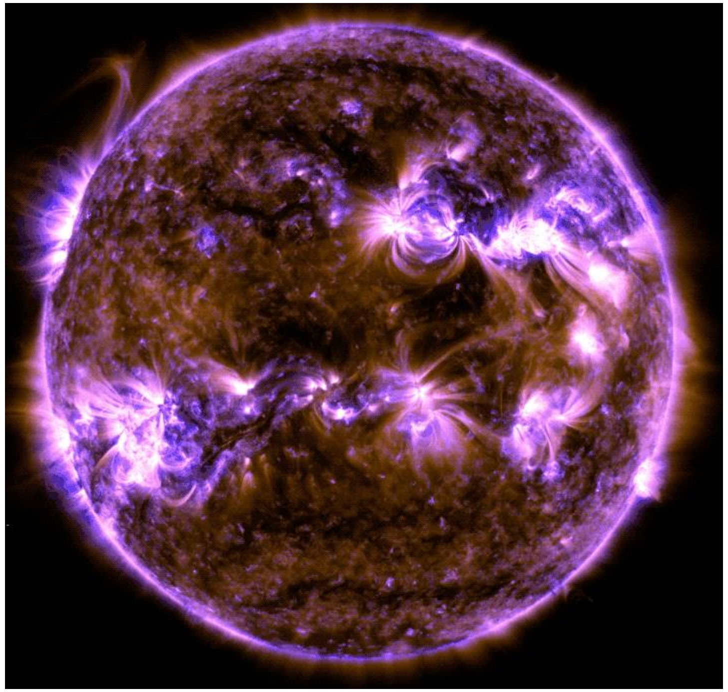
FÍSICA 02

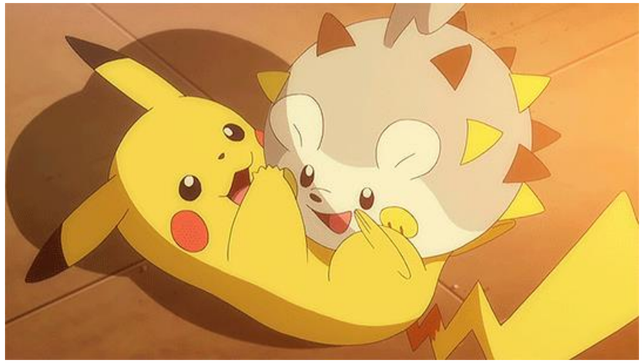
Clase 15-16: Campos Magnéticos.



Profesor: Mirko Mol

OBJETIVOS DE LA CLASE

I. Relación entre los campos magnéticos y fuerza magnética.
II. Movimiento de una partícula con carga en un campo magnético uniforme.
III. Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente.



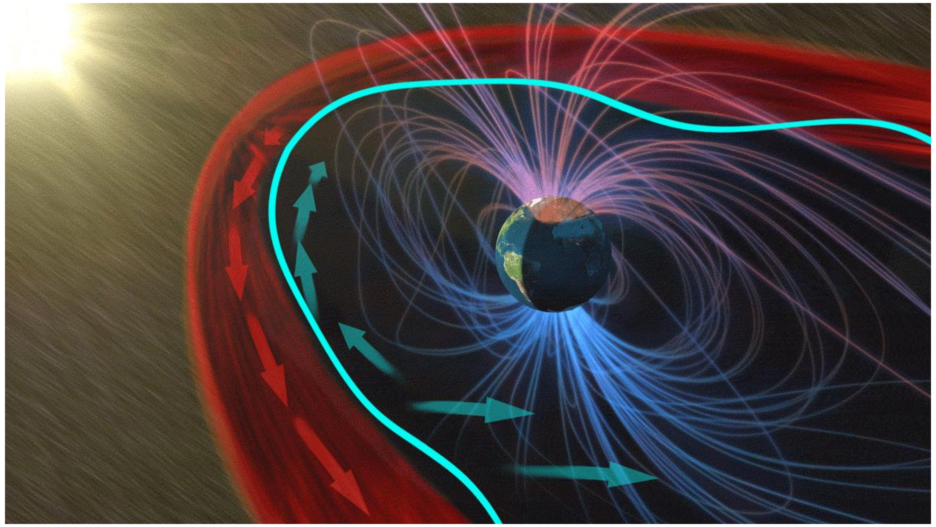
INTRODUCCIÓN

Hay registros históricos que sitúan la primera brújula que utilizaba una aguja magnética en el siglo XIII a.n.e. Con seguridad podemos situar a los griegos y su uso de la magnetita en 800 a.n.e junto con el estudio de sus propiedades.

No es hasta el 1269, en el que el estudio de imanes se definió por primera vez el uso de la palabra *Polos magnéticos.*

Los experimentos llevaron a concluir que, en **todo imán**, cualquiera sea su forma, **tiene dos polos, un polo norte y otro sur.** Los imanes al interactuar entre sí ejercen una fuerza que está regida de forma similar a las cargas eléctricas; ***los polos del mismo signo se repelen y los de distinto signo se atraen.***

INTRODUCCIÓN



En 1600 William Gilbert propuso en base a sus experimentos que la tierra era un gigantesco imán, y debido a esto las brújulas siempre se alineaban en la misma dirección. Es importante notar que, una brújula se alinea con el campo magnético de la tierra, esto significa, ***el polo norte de la tierra es un Polo Sur magnético y el polo Sur de la tierra es un polo Norte magnético.***

Es importante notar las semejanzas con la fuerza de coulomb, pero también debemos recalcar una **diferencia trascendental**. Nunca ha sido posible aislar un solo polo magnético, dicho de otra forma, jamás se han creado ni se han encontrado hasta ahora **monopolos magnéticos**. Por lo que, *los polos magnéticos siempre se encuentran en pares.*

INTRODUCCIÓN

Durante mucho tiempo el magnetismo y los fenómenos eléctricos se estudiaron como dos disciplinas separadas. Durante una conferencia en 1819 Oersted descubrió que una corriente eléctrica era capaz de desviar la aguja de una brújula.

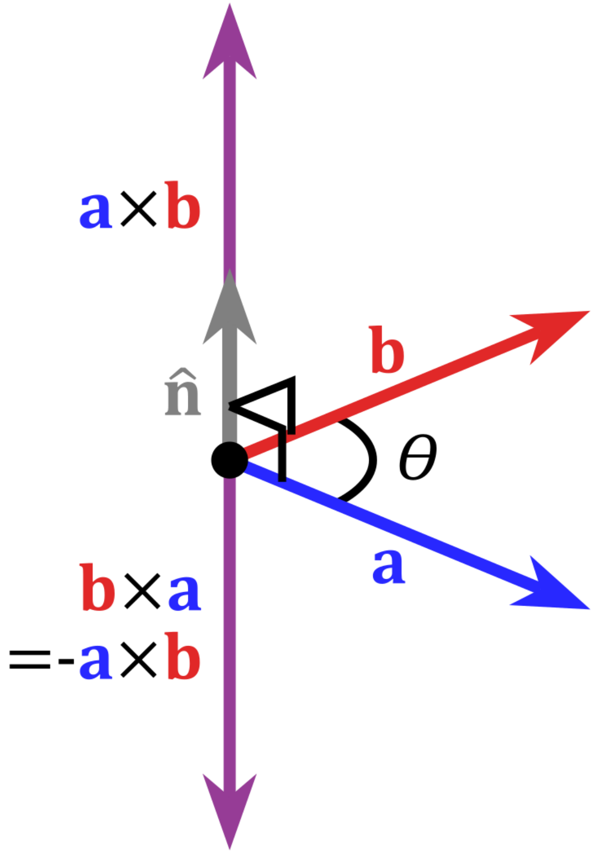
Luego del trabajo experimental de grandes científicos como Faraday, Henry, Hertz y Lenz en el que encontraban relaciones entre **la electricidad y el magnetismo**, un científico llamado *James Clerk Maxwell* demostró que un campo eléctrico que varía crea un campo magnético, demostrando teóricamente la relación intrínseca entre la electricidad y magnetismo, en una ***serie de ecuaciones que hoy en día resumen el electromagnetismo***.

PRODUCTO CRUZ

Antes de continuar, vamos a definir una nueva operación entre vectores.
El producto cruz es una operación entre vectores que entrega un vector, matemáticamente se puede definir:

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \ \ \hat{n}$$

Donde $\hat{n}$ corresponde a la dirección que es ortogonal(perpendicular) a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



PRODUCTO CRUZ

El producto vectorial nos permite definir algunas relaciones útiles:

1. Si tenemos dos vectores que son paralelos entre ellos, el producto cruz es igual a 0.

2. Si dos vectores son perpendiculares el producto cruz entre ellos es máximo.

3. Sean dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ oblicuos en 3D, el vector resultante se puede calcular mediante el uso de la siguiente matriz:

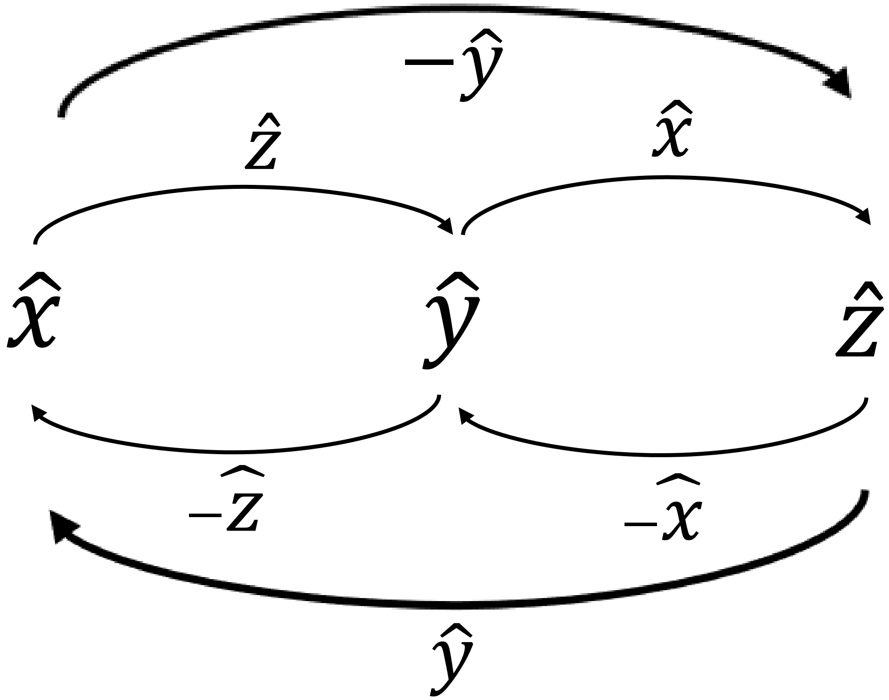
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}(A_y B_z - B_y A_z) - \hat{y}(A_x B_z - B_x A_z) + \hat{z}(A_x B_y - B_x A_y)$$

PRODUCTO CRUZ

Antes de continuar, notemos también una relación muy útil:



Por lo tanto, es fácil de ver que:

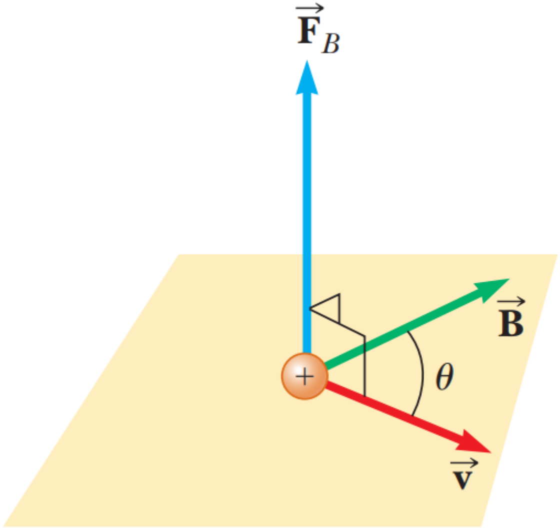
$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

FUERZA MAGNÉTICA.

Definimos el vector campo eléctrico como $\vec{B}$, la fuerza magnética que experimenta una carga $\overrightarrow{F_b}$ debido al campo y finalmente la velocidad de la carga $\vec{v}$.

Por simplicidad, vamos a suponer que en nuestra región solo existe campo magnético. Experimentalmente se ha encontrado que la fuerza magnética que experimenta una partícula con carga q es:

$$\overrightarrow{F_b} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

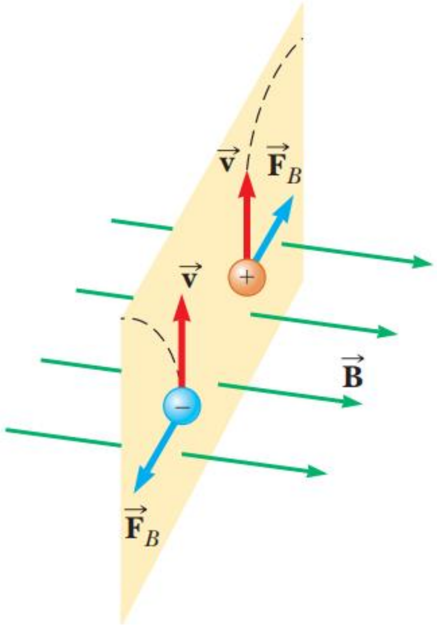


Analicemos la expresión anterior:

1. Si la partícula se mueve paralela a la dirección del campo magnético, la fuerza magnética que actúa sobre ella es 0.

2. Cuando $\theta \neq 0$, la fuerza magnética es perpendicular al plano que forman $\vec{v}$ y $\vec{B}$.

FUERZA MAGNÉTICA.



3. La fuerza magnética ejercida sobre una carga positiva tiene una dirección opuesta a la fuerza ejercida sobre una carga negativa cuando ambas se mueven en la misma dirección.

4. Si la partícula se encuentra en reposo en el campo magnético la fuerza magnética va a ser 0.

5. El trabajo realizado por la fuerza magnética sobre la partícula con carga se puede calcular:

$$W_b = \int \vec{F}_b \cdot d\vec{s}$$

$$= 0$$

Esto es debido a que la fuerza magnética siempre es perpendicular a la dirección de movimiento de la carga. Esto implica, que la fuerza magnética no puede generar un cambio en la energía cinética de la partícula.

EJEMPLO RESUELTO 032

Un protón se mueve con una velocidad $\vec{v} = v\ \hat{x}$ en una región donde el campo magnético tiene un valor $\vec{B} = B_0(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$

¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética que experimenta esta carga?

Solución:

Por definición, la fuerza que va a experimentar la carga es:

$$\vec{F}_b = q\ \vec{v} \times \vec{B}$$

$$= q \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v & 0 & 0 \\ B_0 & B_0 & B_0 \end{vmatrix}$$

$$= q(-vB_0\hat{y} + vB_0\hat{z})$$

$$= qvB_0(-\hat{y} + \hat{z})$$

Finalmente, calculando la magnitud de la fuerza:

$$F_b = qvB_0\sqrt{2}$$

EJEMPLO RESUELTO 033

Un protón se mueve con una velocidad $\vec{v} = 2\ \hat{x} - 4\ \hat{y} + \hat{z}\ [m/s]$ en una región donde el campo magnético tiene un valor $\vec{B} = \hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}$ [T]
¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética que experimenta esta carga?

Solución:
Por definición, la fuerza que va a experimentar la carga es:

$$\vec{F}_b = q\ \vec{v} \times \vec{B}$$

$$= q \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= q\{\ [\hat{x}(-4 * -3) - (2 * 1)] - \hat{y}[(2 * -3) - (1 * 1)] + \hat{z}[(2 * 2) - (1 * -4)]\}$$

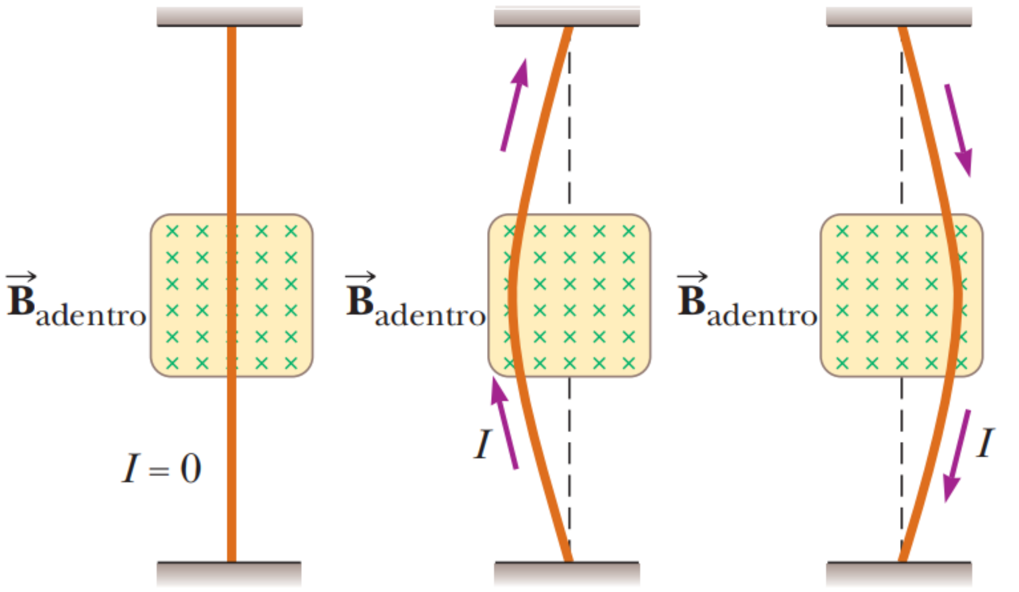
$$= q(10\ \hat{x} + 7\hat{y} + 8\hat{z})$$

Finalmente, calculando la magnitud de la fuerza:

$$F_b = 15{,}6\ q\ [N]$$

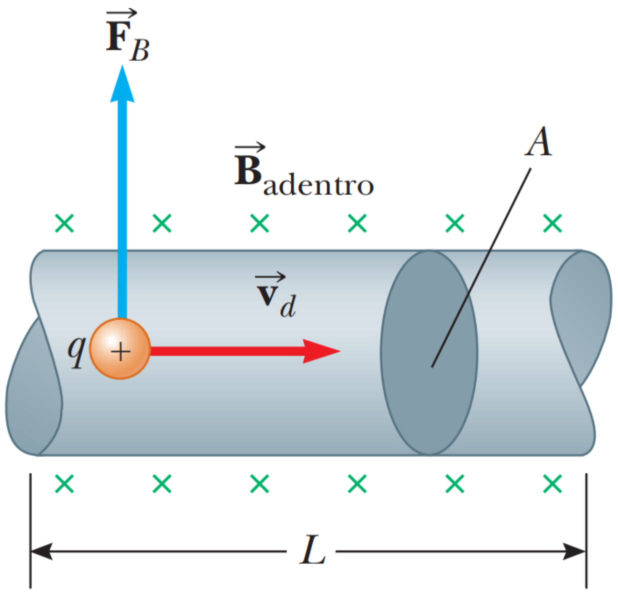
FUERZA MAGNÉTICA Y CORRIENTE EN UN CONDUCTOR.

Un conductor que transporta carga eléctrica (Corriente) también debería experimentar una fuerza al estar inmerso en un campo magnético.
Como la corriente eléctrica es un conjunto de cargas eléctricas en movimiento, esperamos que la fuerza neta que se aplica al campo sea la suma de las fuerzas sobre cada una de las cargas.



FUERZA MAGNÉTICA Y CORRIENTE EN UN CONDUCTOR.

Para poder mesurar el fenómeno del que hablamos, consideremos un trozo de cable conductor de largo L, sección transversal A que conduce una corriente I de densidad de carga por volumen n en un campo magnético uniforme $\vec{B}$.



Si cada una de las cargas lleva una velocidad $\vec{v}_d$, entonces la fuerza eléctrica sobre una de ellas es $q\vec{v}_d \times \vec{B}$.
Ahora, si queremos la fuerza total debemos considerar todas las cargas que circulan por el conductor.

Debido a que el volumen del alambre es AL, el número de cargas es nAL, por lo tanto, la fuerza total sobre el alambre es:

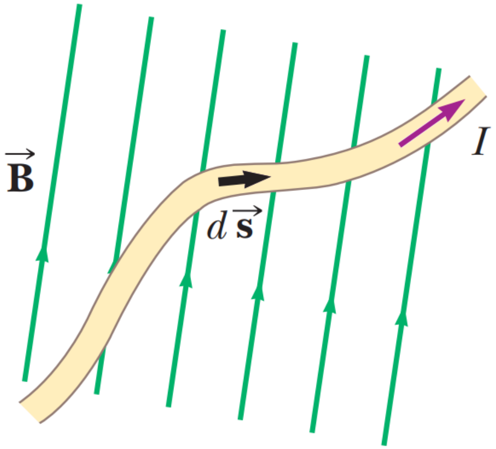
$$\vec{F}_b = \left(q\vec{v}_d \times \vec{B}\right)nAL$$

FUERZA MAGNÉTICA Y CORRIENTE EN UN CONDUCTOR.

Finalmente, debemos notar que el termino $qnav_d$ es la cantidad de cargas q que circulan por el conductor, que corresponde a *la corriente* que circula por el conductor. De nuestra imagen, podemos notar que $\vec{v}_d$ y L tienen la misma dirección, considerando esto y lo anterior, podemos reescribir la fuerza magnética como:

$$\vec{F}_b = I\,\vec{L} \times \vec{B}$$

Donde $\vec{L}$ es un vector que está en la misma dirección que la corriente y la magnitud es igual a L.



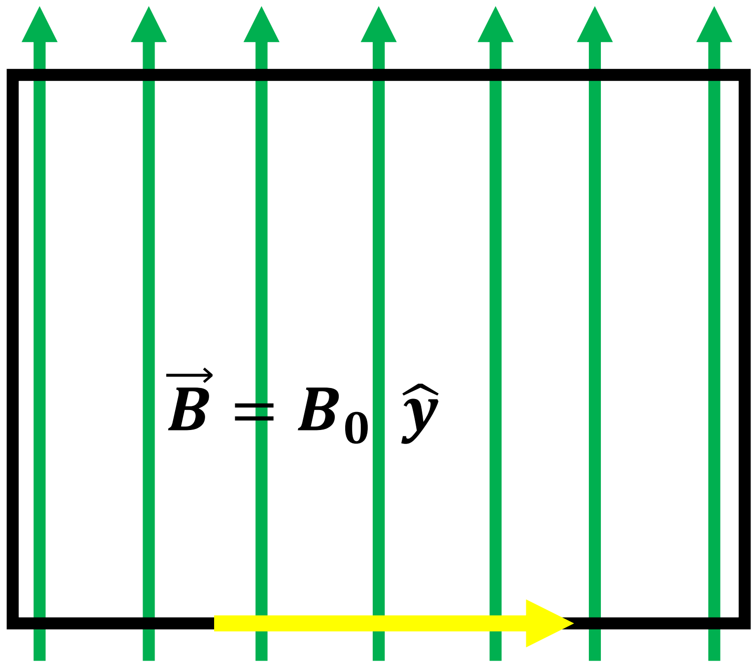
Ahora consideremos un segmento de alambre de forma arbitraría de sección transversal uniforme en un campo magnético, considere segmentos de longitud ds, por lo tanto, la fuerza sobre ese trocito de cable es:

$$d\vec{F}_b = I\,d\vec{s} \times \vec{B}$$

Por lo tanto, si sumamos todos estos diferenciales de fuerza obtenemos:

$$\vec{F}_b = I \int_a^b d\vec{s} \times \vec{B}$$

EJEMPLO RESUELTO 034



Un alambre conductor doblado formando un cuadrado de lado a, está inmersa en un campo magnético uniforme y transporta una corriente I.

Si el alambre está el plano xy y el campo magnético uniforme se dirige en el eje $\hat{y}$.

Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre el circuito de la figura.

Solución:

Vamos a dividir el alambre en dos partes, primero la parte horizontal de abajo del alambre recto, en esta sección aplicando:

$$\vec{F}_{b1} = \int_0^a I d\vec{s} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_{b1} = I\int_0^a (dx\ \hat{x} \times B\ \hat{y})$$
$$= I\int_0^a Bdx\ \ \hat{z}$$
$$= IBa\ \hat{z}$$
Luego, calculando la fuerza en la parte vertical de la derecha:
$$\vec{F}_{b2} = \int_0^a Id\vec{s} \times \vec{B}$$
$$\vec{F}_{b2} = I\int_0^a (dy\ \hat{y} \times B\ \hat{y})$$
$$\vec{F}_{b2} = 0$$

Ahora, calculando la fuerza en la parte horizontal vertical:
$$\vec{F}_{b3} = \int_a^0 Id\vec{s} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_{b3} = I \int_a^0 ((-dx)\,(-\hat{x}) \times B\,\hat{y})$$

$$\vec{F}_{b3} = I \int_a^0 Bdx\,\hat{z}$$

$$\vec{F}_{b3} = -IBa\,\hat{z}$$

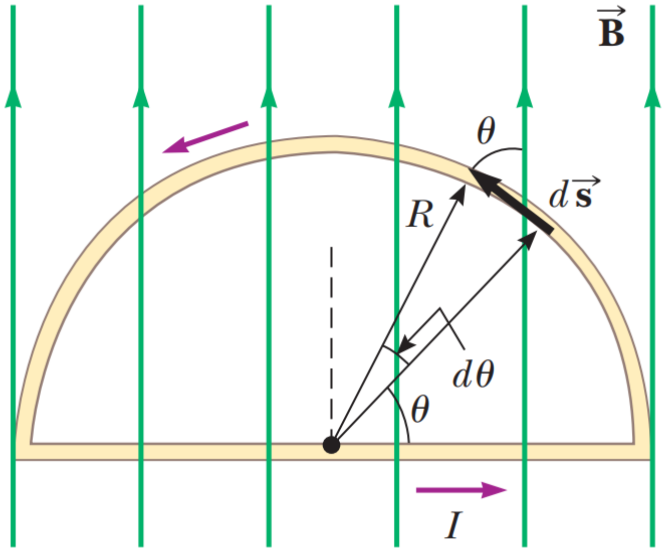
Calculando el último tramo de la espira, como es vertical pero la parte de la izquierda, tenemos el mismo resultado anterior que es 0.

Sumando la contribución de cada fuerza:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{b1} + \vec{F}_{b3}$$

$$\vec{F}_T = 0$$

EJEMPLO RESUELTO 035



Un alambre conductor doblado formando un semicírculo de radio R formando un circuito cerrado y transporta una corriente I

Si el alambre está el plano xy y un campo magnético uniforme se dirige en el eje $\hat{y}$.

Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre el circuito de la figura.

Solución:

Vamos a dividir el alambre en dos partes, primero la parte del alambre recto, en esta sección aplicando:

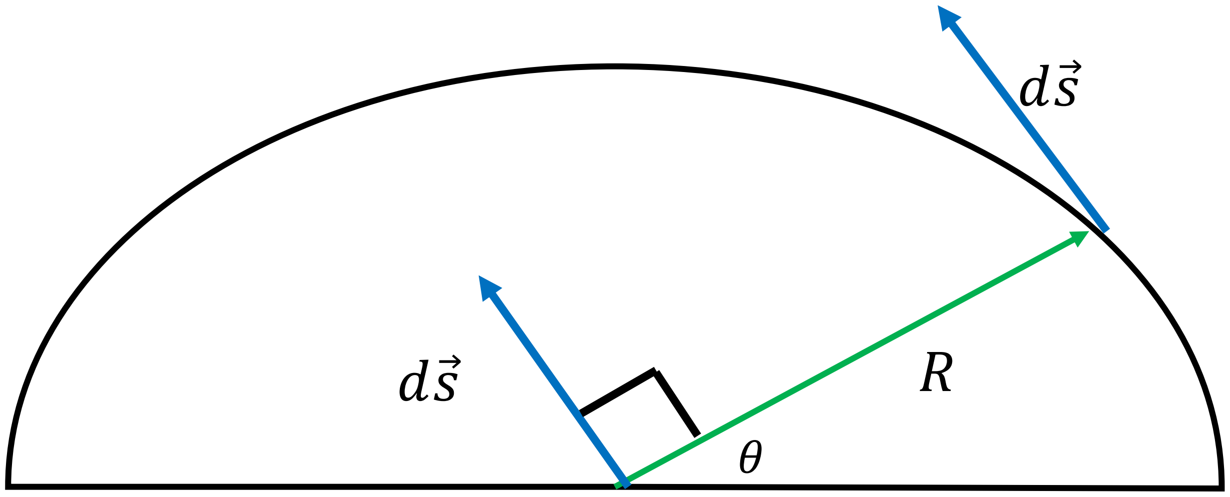
$$\vec{F}_{b1} = \int_{-R}^{R} I d\vec{s} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_{b1} = I \int_{-R}^{R} (dx\ \hat{x} \times B\ \hat{y})$$
$$= I \int_{-R}^{R} B dx\ \ \hat{z}$$
$$= 2IBR\ \hat{z}$$

Para la parte curva del anillo, tenemos un semicírculo, por lo que podemos solucionar el problema de la siguiente forma:

$$\vec{F}_{b2} = \int_0^{\pi} I d\vec{s} \times \vec{B}$$

Notemos como escribimos $d\vec{s}$:



$$d\vec{s} = ds\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\ \hat{x} + ds \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\ \hat{y}$$

Por propiedades trigonométricas:

$$d\vec{s} = -ds \sin\theta \,\hat{x} + ds \cos\theta \,\hat{y}$$

Por lo que finalmente:

$$d\vec{s} \times \vec{B} = -Bds \sin\theta \;\hat{z}$$

Escribiendo en la expresión de la fuerza:

$$\vec{F}_b = I \int_0^{\pi} -Bds \sin\theta \;\hat{z}$$

$$\vec{F}_b = I \int_0^{\pi} -BR \sin\theta \, d\theta \,\hat{z}$$

$$\vec{F}_b = IRB \int_0^{\pi} -\sin\theta \, d\theta \,\hat{z}$$

$$\vec{F}_b = -2IRB \,\hat{z}$$

VECTORES UNITARIOS POLARES

En esta parte del curso, van a ser comunes las orientaciones radiales o en la dirección del crecimiento del ángulo θ, por lo que nos vas a ser útil el desarrollo de los vectores unitarios en coordenadas polares.
Por definición tenemos que la distancia radial a una carga es:

$$\vec{r} = R\cos\theta\ \hat{x} + R\sin\theta\,\hat{y}$$

Si normalizamos este vector, sabemos que:

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$$

Al igual que sucede con los vectores del plano cartesiano, que son perpendicular entre sí, ahora queremos encontrar otro vector, que vamos a llamar $\hat{\theta}$ que sea perpendicular a $\hat{r}$, que crezca en la dirección del ángulo y que sea unitario:

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = \theta_x\cos\theta + \theta_y\sin\theta$$
$$0 = \theta_x\cos\theta + \theta_y\sin\theta$$

VECTORES UNITARIOS POLARES

Por otra parte, como el vector tiene que ser unitario:

$$\theta_x^2 + \theta_y^2 = 1$$

$$\theta_x = \sqrt{1 - \theta_y^2}$$

Reemplazando esto en la expresión anterior;

$$0 = \sqrt{1 - \theta_y^2} \cos\theta + \theta_y \sin\theta$$

$$\vdots$$

$$\theta_y = \pm \cos\theta$$

Dada lo que necesitamos, vamos a elegir la parte positiva, porque queremos ir en la dirección en que crece el ángulo θ. Por lo tanto, reemplazando en la expresión del producto punto:

$$0 = \theta_x \cos\theta + \cos\theta \sin\theta$$

$$\theta_x = -\sin\theta$$

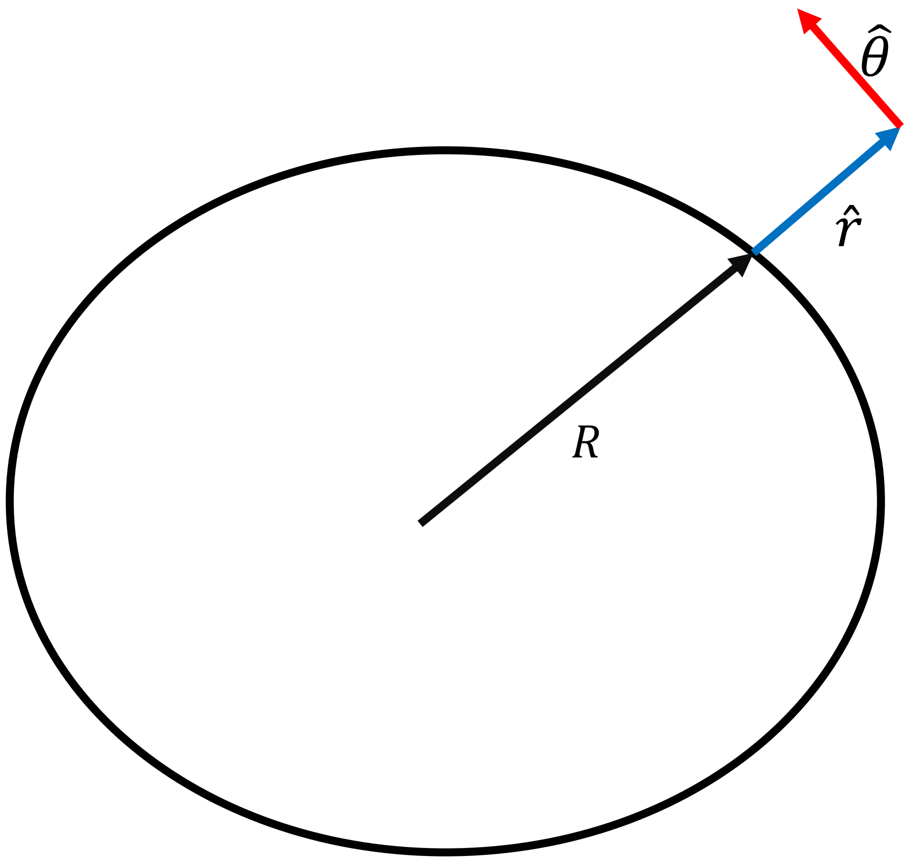
VECTORES UNITARIOS POLARES

Lo que implica, que el vector que buscamos se puede escribir como:

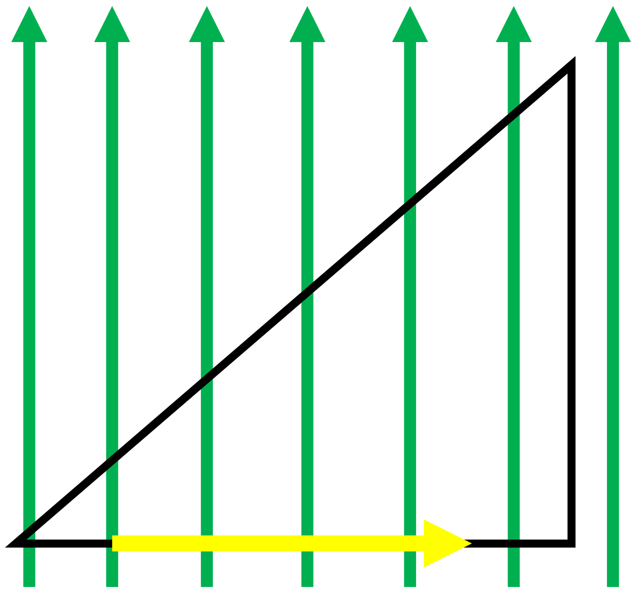
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\ \hat{x} + \cos\theta\ \ \hat{y}$$

Por lo tanto, los vectores unitarios en coordenadas en polares quedan definidos como:

$$\hat{r} = \cos\theta\ \hat{x} + \sin\theta\ \ \hat{y}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\ \hat{x} + \cos\theta\ \ \hat{y}$$



EJEMPLO RESUELTO 035



Un alambre conductor doblado formando un triángulo de base a y altura h, formando un circuito cerrado y transportando una corriente I.

Si el alambre está el plano xy y un campo magnético uniforme se dirige en el eje $\hat{y}$.

Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre el circuito de la figura.

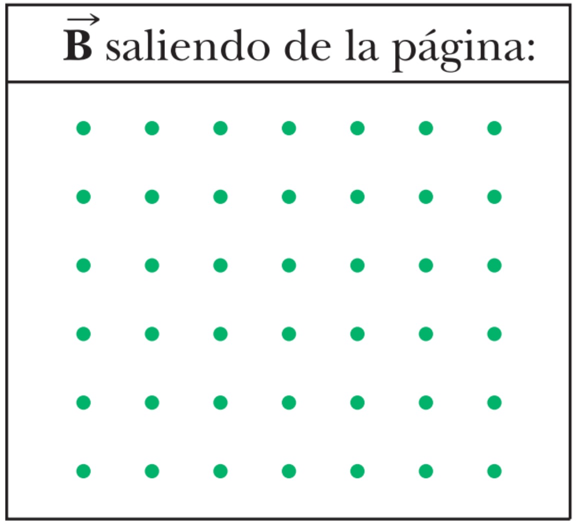
Solución:
Como ya hemos calculado las partes horizontales y verticales, solo vamos a calcular la parte diagonal.

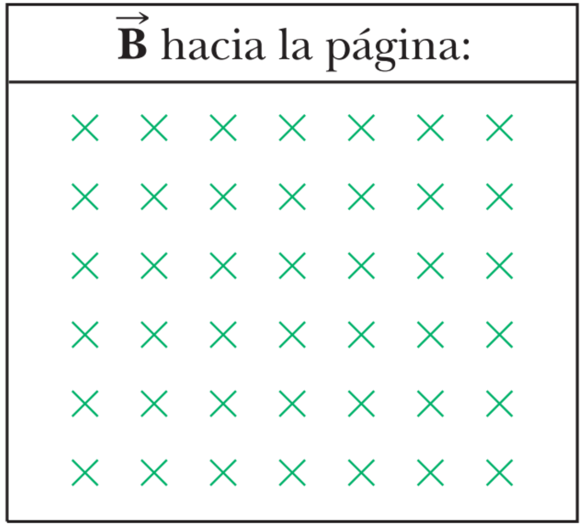
$$\vec{F}_{b3} = \int I d\vec{s} \times \vec{B}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{b3} &= I \int_0^{\sqrt{h^2+a^2}} (-ds\,(\hat{x}+\hat{y})) \times B_0\,\hat{y}) \\
&= -IB_0 \int_0^{\sqrt{h^2+a^2}} ds\ \ \hat{z} \\
&= -IB_0\sqrt{h^2+a^2}\ \hat{z}
\end{aligned}
$$

MOVIMIENTO EN EL CAMPO MAGNÉTICO

Por simplicidad vamos a tener las siguientes consideraciones al momento de analizar el movimiento de una carga en presencia de campo magnético.
Cuando el campo sale de la página se va a dibujar un punto, en general vamos a considerar que **apunta en $\hat{\mathbf{z}}$**. En el caso que el campo entre hacía la página, vamos a considerar las cruces, lo que significa que el **campo apunta en $-\hat{\mathbf{z}}$**.





Recapitulando lo que sabemos hasta ahora:

I. La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad.

II. El trabajo realizado por la fuerza magnética es 0.

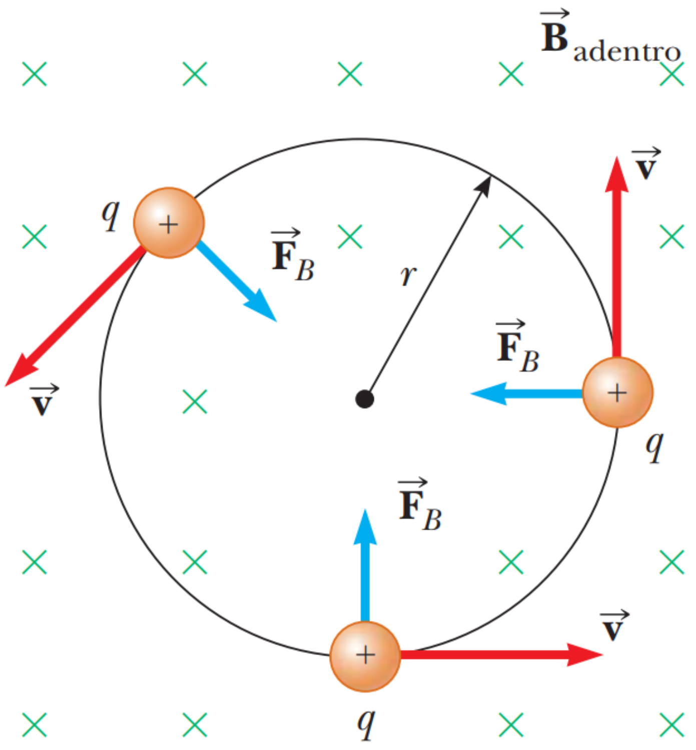
III. La rapidez se mantiene constante cuando una partícula está inmersa en un campo magnético.

MOVIMIENTO EN EL CAMPO MAGNÉTICO

Consideremos un campo magnético que entra en la pantalla, como ya vimos la partícula no aumenta su rapidez, debido a que la fuerza magnética es siempre perpendicular.

Si una partícula de **carga positiva** con velocidad $\vec{v}$ entra en una región con campo magnético uniforme, va a experimentar **una fuerza** como en la figura.

Lo que va a modificar la dirección de movimiento, cambiando la dirección de la velocidad, pero no su magnitud. Si seguimos con este ejercicio vamos a obtener que la ***trayectoria que va a seguir la partícula es una circunferencia.***



MOVIMIENTO EN EL CAMPO MAGNÉTICO

Considerando este movimiento como un movimiento circular uniforme, y aplicando la segunda ley de Newton:

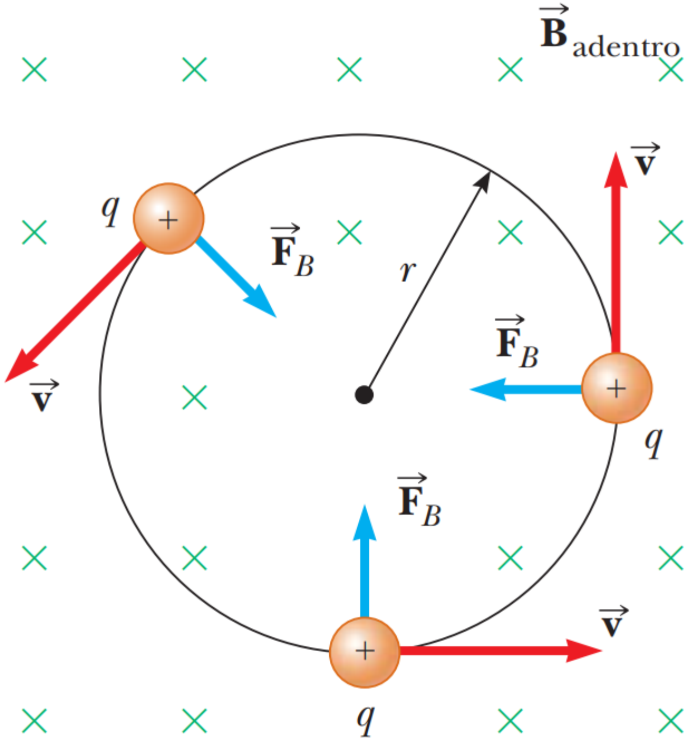
$$\sum F = ma$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

Lo que nos permite obtener el valor del radio:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Por lo tanto, el radio de curvatura está determinado por la velocidad y la intensidad del campo magnético.



MOVIMIENTO EN EL CAMPO MAGNÉTICO

Como es un movimiento circular uniforme podemos encontrar la rapidez angular:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

Finalmente, nos falta determinar el termino temporal, en este caso es el periodo T asociado al movimiento:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Esto nos indica que la rapidez angular y el periodo no dependen de la rapidez de la partícula.