



Ayudantía 9

Límites y Continuidad

02/08/2024

En este taller, analizaremos la existencia de algunos límites y determinaremos su valor en el caso de que existan. Además, trabajaremos con límites trigonométricos y aplicaremos algunas identidades trigonométricas para resolverlos. Finalmente, estudiaremos la continuidad de funciones en un punto.

Objetivos:

- Calcular límites de funciones utilizando propiedades conocidas.
- Hacer uso de identidades trigonométricas para calcular límites.
- Aprender a usar el cambio de variable en el cálculo de límites.
- Analizar la continuidad de funciones en un punto.

Ejercicios Propuestos

1. Analice si los siguientes límites existen. En caso de existir, determine su valor.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2x+2} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{2x}}.$

Solución: Manipulando la expresión algebraicamente se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2x+2} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{2x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2x+2} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{2x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{-2x+2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{-2x+2} + \sqrt{x+2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-2x+2) - (x+2)}{\sqrt{2x}(\sqrt{-2x+2} + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{\sqrt{2x}(\sqrt{-2x+2} + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{\sqrt{2}(\sqrt{-2x+2} + \sqrt{x+2})} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 4x + 3}.$

Solución: Note que

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (x^2 - 2x + 3)(x - 1)$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 3)(\cancel{x - 1})}{(x - 3)(\cancel{x - 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} \\ &= \frac{2}{-2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 4x + 3}.$

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x + 3)(\cancel{x - 1})}{(x - 3)(\cancel{x - 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} \end{aligned}$$

Si $x = 3$, en el numerador tenemos que $(3)^2 - 2 \cdot 3 + 3 = 9 - 6 + 3 = 6 \neq 0$, luego

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 3) \cdot \frac{1}{x - 3}$$

$$\text{donde } \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3 = 6 > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 3^+ \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 3^- \end{cases}$$

lo que nos dice que

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 2x + 3) \cdot \frac{1}{x - 3} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 2x + 3) \cdot \frac{1}{x - 3} = -\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 4x + 3}$ no existe.

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}.$

Solución: Consideremos la función $f(x) : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2 - |x|}{2 + x}$. Se sigue que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 - x}{2 + x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{2 + x}{2 + x} & \text{si } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0] \end{cases} = \begin{cases} \frac{2 - x}{2 + x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0] \end{cases}$$

Como queremos resolver $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$, debemos considerar cuando x tiende a -2 , por lo cual consideramos el caso cuando x es menor a 0 . Por lo tanto la expresión dentro del límite es igual a 1^1 . Así tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x} = \lim_{x \rightarrow -2} 1 = 1.$$

2. Calcule los siguientes límites trigonométricos:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{2x - \pi}.$

Hint: Utilice el cambio de variable $u = 2x - \pi$.

Solución: En lo que sigue ocuparemos la identidad $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$ y el hecho de que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$.

Ahora, ocupemos el Hint. Sea $u = 2x - \pi$. Como $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, entonces $u \rightarrow 0$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{2x - \pi} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{u+\pi}{2}\right)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u + \pi)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)\cos(\pi) + \sin(\pi)\cos(u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\sin(u)}{u} \\ &= -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} \\ &= -1. \end{aligned}$$

¹También puede calcular los límites laterales y notar que ambos límites (por la derecha e izquierda) tomarán el caso cuando el x es menor que 0 , por lo tanto los límites laterales valdrán igualmente 1 .

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(7x)}{x^2}.$

Solución: Manipulando algebraicamente tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(7x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(7x)}{x^2} \cdot \left(\frac{1 + \cos(7x)}{1 + \cos(7x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(7x)}{x^2(1 + \cos(7x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(7x)}{x^2(1 + \cos(7x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(7x)}{x} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \cos(7x)} \right) \right] \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $u = 7x$, con lo cual $u \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$ y tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(7x)}{x^2} &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(u)}{\frac{u}{7}} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \cos(u)} \right) \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[\left(7 \cdot \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \cos(u)} \right) \right] \\ &= 49 \left[\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \cos(u)} \right) \right] \\ &= 49 \left(1 \cdot \frac{1}{1 + \cos(0)} \right) \\ &= 49 \left(\frac{1}{1 + 1} \right) \\ &= \frac{49}{2}. \end{aligned}$$

3. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x^2 - 5x + 2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{12} & \text{si } x = 2 \\ \frac{x-1}{x+10} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en $x = 2$.

Solución: Sabemos que f es continua en $x = 2$ si $2 \in \text{Dom} f$ y

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$$

Como $2 \in \text{Dom} f$ y $f(2) = \frac{1}{12}$, entonces no falta verificar que el límite exista. Para esto veamos los límites laterales.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x^2 - 5x + 2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2 - 4}{(2x - 1)(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(2x - 1)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1}{x + 10} = \frac{1}{12}$$

Por lo tanto, el límite existe y está dado por

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{12}.$$

Luego, f es continua en $x = 2$.