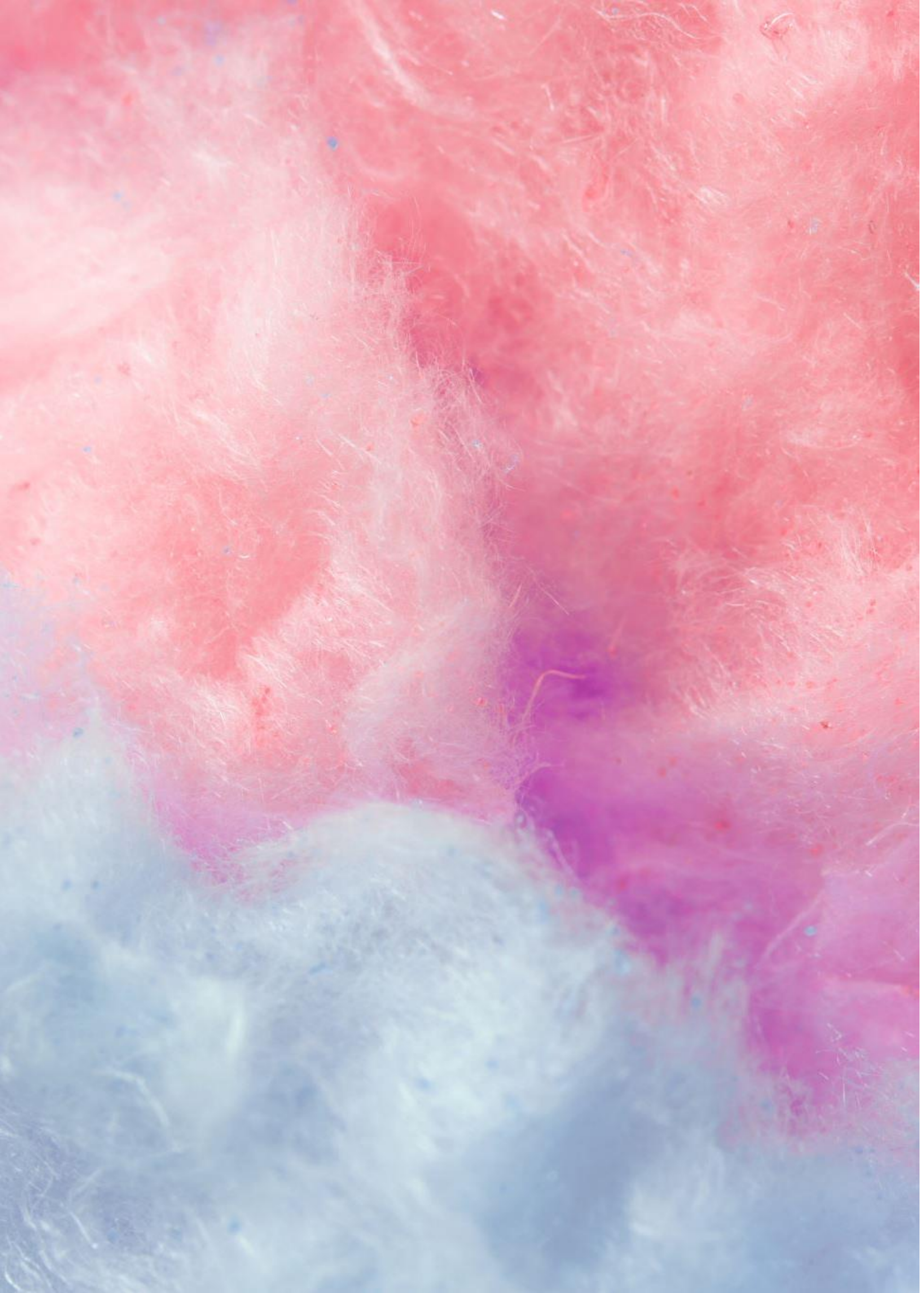


FÍSICA 01

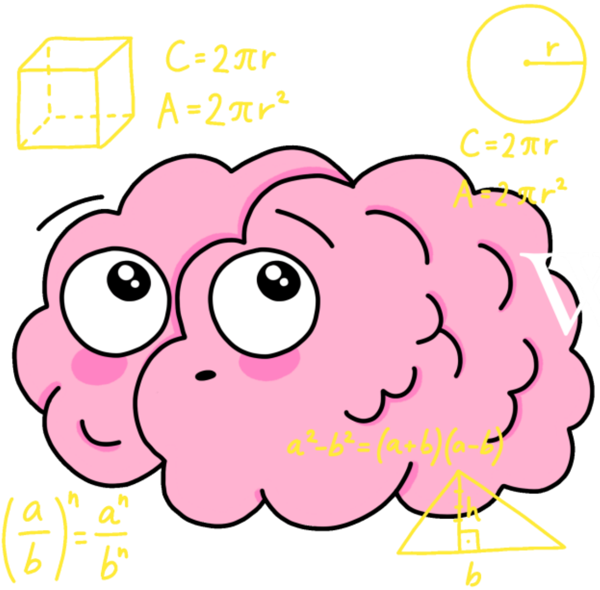
Clase 13-14: Trabajo y Energía

Profesor: Mirko Mol

OBJETIVOS DE LA CLASE

I. Definición de Trabajo mecánico y su aplicación.

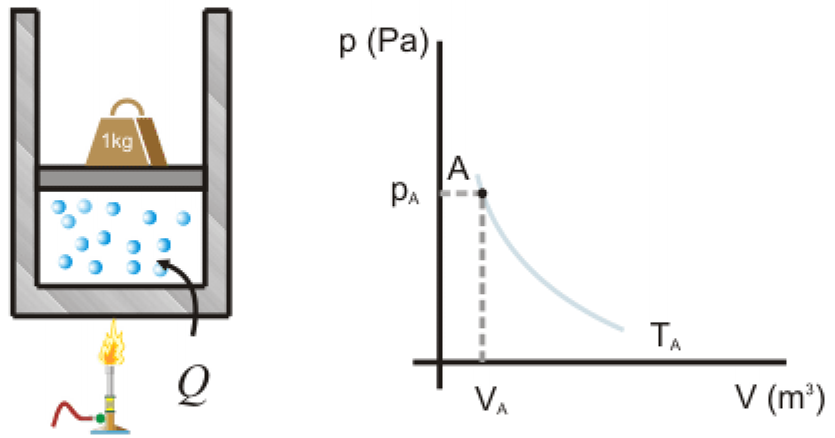
II. Tipos de energía y su relación con la energía.

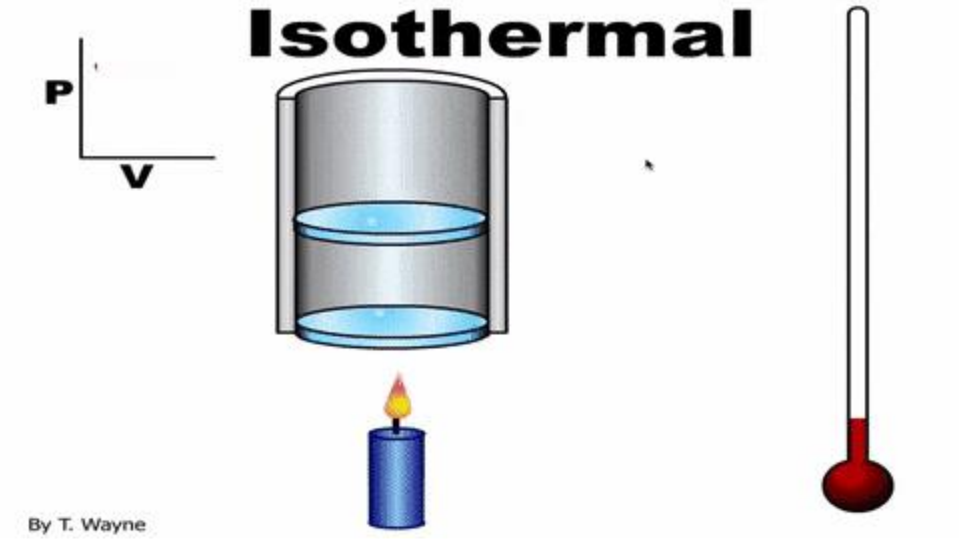


¿QUÉ ES UN SISTEMA?

Muy a menudo, cuando se trabaja con los conceptos de energía e intercambio o transferencia de energía, se debe definir los límites de nuestro problema.

Se va a considerar una pequeña región del universo, como nuestro sistema, la cual puede o no tener paredes físicas que lo dividen del resto del universo.





Esto no implica que el sistema no pueda relacionarse con su entorno, de hecho, un mecanismo que influye en la dinámica de un sistema es el trabajo.

PRODUCTO PUNTO

Considere dos vectores $\vec{F}$ y $\Delta\,\vec{r}$ definidos respecto a un sistema de referencia. El producto punto entre ellos se define como:

$$\vec{F}\cdot\Delta\,\vec{r} = \left|\vec{F}\right||\Delta\,\vec{r}|\cos\theta$$

Donde θ es el ángulo entre vectores.

También, el producto punto se puede definir como:

$$\vec{F}\cdot\Delta\,\vec{r} = \sum F_i \Delta r_i$$

Donde el subíndice i denota la componente de cada eje del respectivo vector.

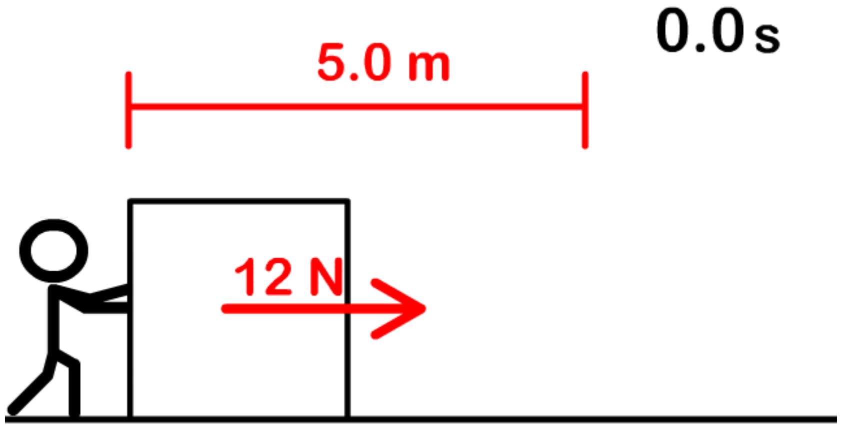
¿QUÉ ES EL TRABAJO?

El trabajo W invertido sobre un sistema por un agente que ejerce una **fuerza constante** sobre el sistema es el producto de la magnitud $\vec{F}$ de la fuerza, la magnitud $\overrightarrow{\Delta r}$ del **desplazamiento** del punto de aplicación de la fuerza y cos θ, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento:

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r}$$
$$= |\vec{F}||\overrightarrow{\Delta r}| \cos \theta$$

Notemos que el trabajo está definido en función de dos vectores, pero es una magnitud escalar.
La unidad de medida del trabajo es N · m, que es definida como Joules.
Escribiendo esta unidad en función de las magnitudes fundamentales:

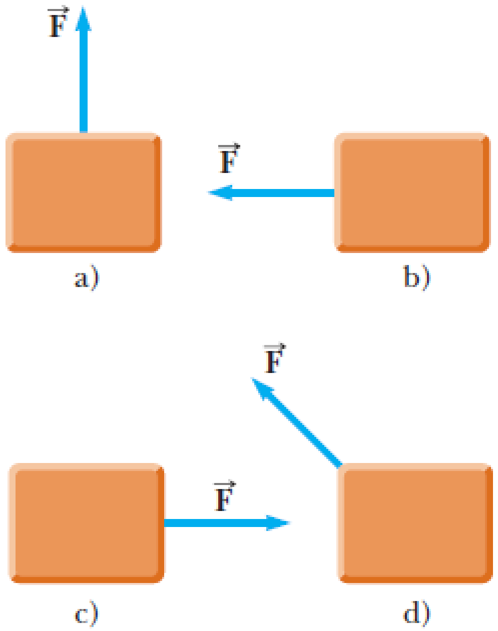
$$[J] = MT^{-2}L^{2}$$



TRABAJO

Problema 01:

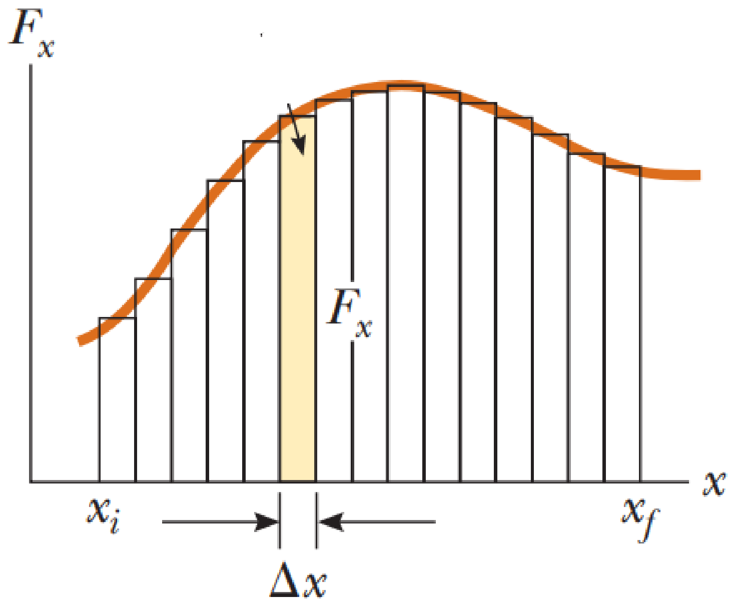
Sobre un cuerpo de masa m se aplica una fuerza $\vec{F}$,si se quiere desplazar hacia la izquierda la mayor distancia posible; ¿Qué situación va a lograr un mayor/óptimo desplazamiento?



TRABAJO CONSUMIDO POR UNA FUERZA VARIABLE

Considere un resorte que está siendo estirado más allá de su punto de equilibrio, por la ley de Hooke sabemos que la fuerza que experimenta no se va a ser constante, va a variar según él estiramiento.
En esta situación no podemos calcular el trabajo con la definición anterior, debido a que la fuerza no es constante.

Consideremos el caso general de una fuerza variable $\vec{F}$ que genera un desplazamiento entre x_i y x_f en el eje x un cuerpo, debido a la componente F_x.
Podemos dividir en segmentos Δx tan pequeños que se puede considerar F_x constante, por lo tanto, podemos decir que el trabajo es:



$$w_i = F_x \Delta x$$

TRABAJO CONSUMIDO POR UNA FUERZA VARIABLE

Donde w_i es el trabajo para un pequeño desplazamiento.
Por lo tanto, podemos dividir la curva en intervalos de ancho Δx, lo que implica que el trabajo entre x_i a x_f es la suma de los w_i:

$$W \approx \sum_{xi}^{xf} F_x \Delta x$$

Si consideramos el ancho del intervalo tendiendo a cero, la suma se convierte en una integral:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{xi}^{xf} F_x \Delta x = \int_{xi}^{xf} F_x \, dx$$

$$W = \int_{xi}^{xf} F_x \, dx$$

TRABAJO CONSUMIDO POR UNA FUERZA VARIABLE

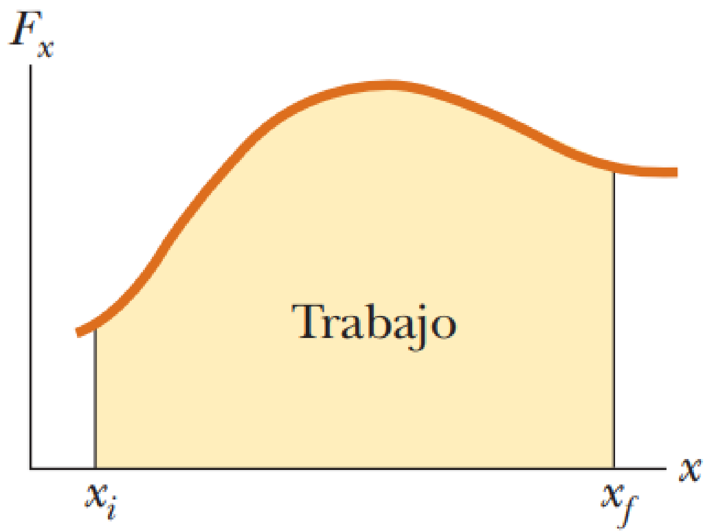
Donde $F_x = |\vec{F}| \cos\theta$ es constante.
Si el sistema se puede modelar como una partícula, el trabajo consumido por el sistema es trabajo invertido por la fuerza neta.

$$W_{neto} = \int_{xi}^{xf} \left(\sum F_x\right) dx$$

En el caso general, donde la dirección puede variar y también la fuerza neta se define el trabajo neto como:

$$W_{neto} = \int_{xi}^{xf} \left(\sum \vec{F}\right) \cdot d\vec{r}$$

Donde $d\vec{r}$ es la componente diferencial del vector desplazamiento.



TRABAJO CONSUMIDO POR UN RESORTE

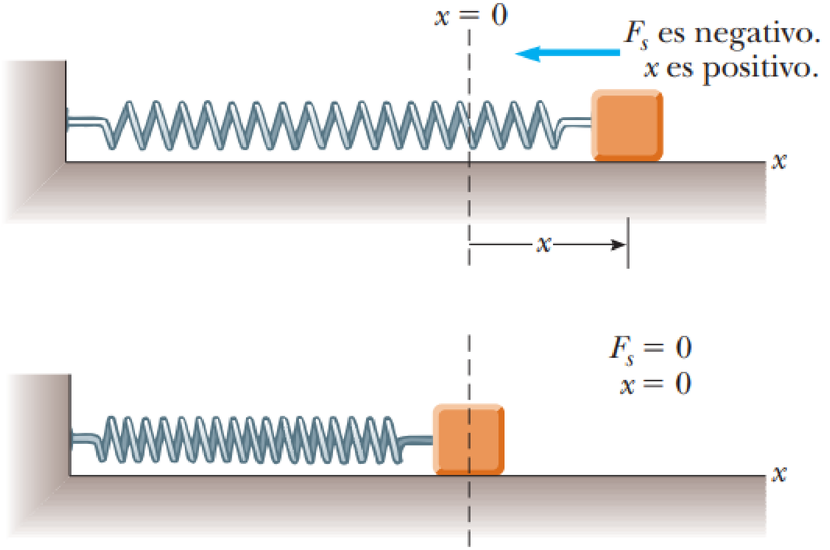
Consideremos un resorte que tiene una masa adosada como la de la figura. Si queremos calcular el trabajo que consume el resorte cuando el bloque está en equilibrio y llega a su posición $x_{máx}$, debemos aplicar:

$$W_{neto} = \int_{xi}^{xf} \left(\sum \vec{F}\right) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{0}^{x_{máx}} (-kx\ \hat{x}) \cdot (dx\ \hat{x})$$

$$= \int_{0}^{x_{máx}} -kx\ dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ kx_{máx}^{2}$$



TRABAJO CONSUMIDO POR UN RESORTE

Si el bloque se somete a un desplazamiento arbitrario desde una posición x_i a x_f :

$$W_{neto} = \int_{xi}^{xf} (-kx) \cdot dx$$

$$W_s = \frac{1}{2} k(x_i^2 - x_f^2)$$

Este es el trabajo consumido por el resorte, es importante notar que no sabemos que lo saco de su equilibrio, por lo tanto, es el **trabajo que ejerce el resorte sobre el bloque**.

Ahora, si queremos saber el trabajo que debe hacer una fuerza externa para mover el bloque desde su posición de equilibrio hasta $x_{máx}$, debemos considerar que:

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_s$$
$$= kx\ \hat{x}$$

TRABAJO CONSUMIDO POR UN RESORTE

Calculando ahora el trabajo debido a la fuerza externa:

$$W_{ext} = \int_{xi}^{xf} \vec{F}_{ext} \cdot dx\ \hat{x}$$

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{xf} kx\ dx$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Notemos que el trabajo invertido sobre la masa por la fuerza externa es de signo contrario al que consume el resorte.

TEOREMA TRABAJO ENERGÍA CINÉTICA

El trabajo de una fuerza sobre un sistema genera que dicho sistema pueda realizar acciones, es, por tanto, el trabajo un mecanismo de transferencia de energía.

Consideremos ahora un bloque de masa m que se desplaza hacia la derecha(en $\hat{x}$) debido a que sobre ella actúa una fuerza neta $\sum\vec{F}$ dirigida hacia la derecha. Calculamos el trabajo sobre la masa:

$$W_{neto} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F\, dx$$

$$W_{neto} = \int_{x_i}^{x_f} ma\, dx$$

$$W_{neto} = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}\, dx$$

TEOREMA TRABAJO ENERGÍA CINÉTICA

$$W_{neto} = \int_{v_i}^{v_f} mv\, dv$$

$$W_{neto} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Si bien este resultado fue considerando un movimiento unidimensional, es extensible a cualquier eje y también a un movimiento en más de 1D.
Notemos que el trabajo se expresa como la variación de una cantidad, dicha cantidad la vamos a definir como la energía cinética traslacional :

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

Por lo tanto, utilizando la expresión anterior se puede escribir el trabajo neto como:

$$W_{neto} = K_f - K_i$$

TEOREMA TRABAJO ENERGÍA CINÉTICA

Teorema trabajo-energía cinética:

"*Cuando se consume trabajo en un sistema, y el único cambio en el sistema es en su rapidez, el trabajo neto consumido en el sistema es igual al cambio en energía cinética del sistema.*"

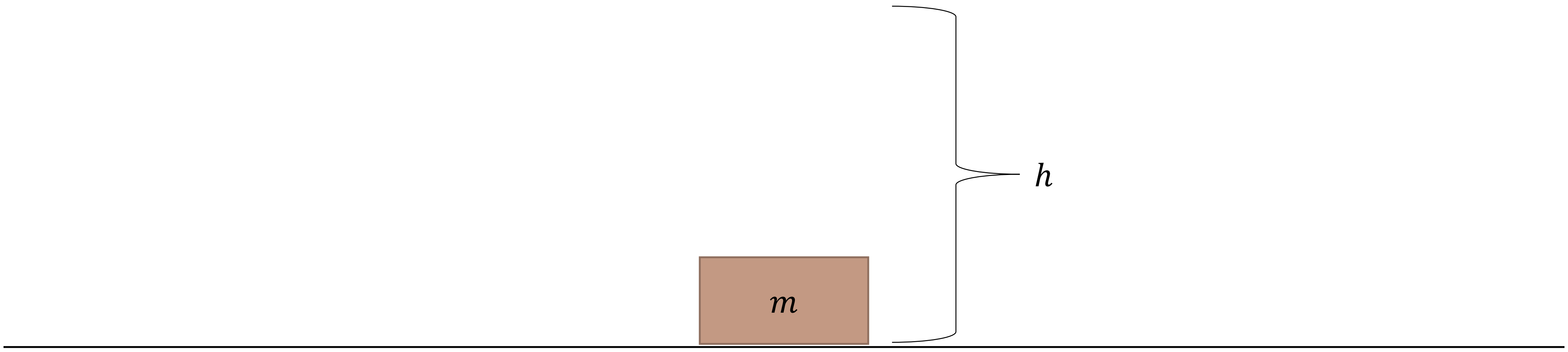
Problema 02:

Sea F_x la fuerza neta y constante en el eje $\hat{x}$ que actúa sobre un cuerpo de masa m que se desplaza en la misma dirección que actúa la fuerza. Si la rapidez inicial del cuerpo es v_i, ¿Qué distancia debe recorrer el cuerpo para duplicar su rapidez?

ENERGÍA POTENCIAL DE UN SISTEMA

Considere un cuerpo sobre una mesa, el cuerpo se encuentra en reposo.
Usted lo toma con una mano, lo eleva hasta una altura h respecto de la mesa dejándolo en reposo a dicha altura.

Según lo que hemos ido hablando, el trabajo es un mecanismo de transferencia de energía. Al tomar el libro con su mano, usted realiza trabajo sobre el libro, pero como el libro estaba en reposo al comienzo y al final no hay cambios de energía. Entonces, ¿dónde está la energía?



ENERGÍA POTENCIAL DE UN SISTEMA

Usted, sin encontrar la respuesta, suelta el cuerpo… y para su sorpresa ahora el cuerpo tiene velocidades que van cambiando, por lo tanto, el cuerpo tiene energía cinética.

Mientras el cuerpo se encuentra a la altura *h,* la energía del sistema tenía el *potencial* para convertirse en energía cinética, pero no lo hizo hasta que la fuerza externa dejo de actuar.

Al mecanismo de almacenamiento de energía que exhiben algunos sistemas se les llama energía potencial, la cuál es bastante sensible a los tipos de interacciones entre los elementos del sistema.

Un objeto en la superficie terrestre que se encuentra a una altura arbitraria h, puede almacenar **energía potencial gravitatoria.**

ENERGÍA POTENCIAL DE UN SISTEMA

Calculemos el trabajo realizado por la fuerza externa, para esto vamos a considerar que el objeto es levantado sin ser acelerado. Además, consideramos que se encuentra inicialmente a altura h_i y es elevado hasta h_f respecto al suelo.

La fuerza externa tiene que ser de igual modulo, pero de distinto sentido a la fuerza peso para que el cuerpo se mueva sin aceleración. Por lo tanto:

$$W_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \Delta \vec{r}$$
$$= (mg\ \hat{y}) \cdot \left[\left(y_f - y_i\right)\ \hat{y}\right]$$
$$W_{ext} = mgh_f - mgh_i$$

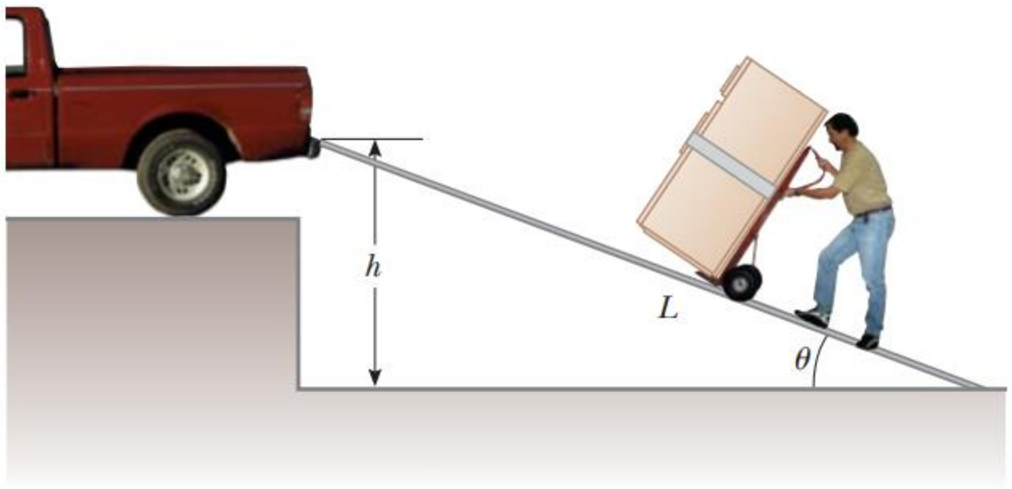
Al igual que en el caso de la energía cinética, aparece un término que es el que cuantifica el trabajo realizado. Se define la energía potencial gravitatoria como:

$$U_g \equiv mgh$$

ENERGÍA POTENCIAL DE UN SISTEMA

Problema 03:

Una persona quiere cargar un refrigerador en una camioneta usando una rampa que forma un ángulo θ. Calcule el trabajo si el refrigerador se mueve a velocidad constante.



ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

Volviendo a los resortes, anteriormente calculamos el trabajo que tiene que ejercer una fuerza externa para cambiar la posición del resorte. Al igual que el caso anterior, podemos notar que en ambas posiciones el resorte estaba estático, pero una vez desaparece la fuerza externa se empieza a mover, exhibiendo una rapidez y por tanto una energía cinética.

Recordemos que el trabajo ejercido por la fuerza externa era:

$$W_{ext} = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Al igual que en los casos anteriores se define un nuevo tipo de energía, en este caso se define la energía potencial elástica como:

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

Debe recordar que x se considera como la deformación longitudinal del resorte (lo comprimido o estirado que esta respecto a su posición de equilibrio).

TEOREMA TRABAJO ENERGÍA CINÉTICA CON ROCE

La fuerza de roce es parte de los sistemas reales, en los cuales hay contacto entre superficies rugosas. El teorema de trabajo energía se puede reescribir de la siguiente forma:

$$W_{OF} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_{of} \ \ \hat{x}\right) \cdot (dx \ \hat{x})$$

$$W_{OF} + \int_{x_i}^{x_f} (-f_k \ \hat{x}) \cdot (dx \ \hat{x}) \ = \int_{x_i}^{x_f} \sum F_{of} \ dx + \int_{x_i}^{x_f} (-f_k \ \hat{x}) \cdot (dx \ \hat{x})$$

$$W_{OF} - f_k \int_{x_i}^{x_f} \ dx = \Delta K$$

$$\boldsymbol{W_{OF} = \Delta K + f_k(\mathbf{x_f} - \mathbf{x_i})}$$

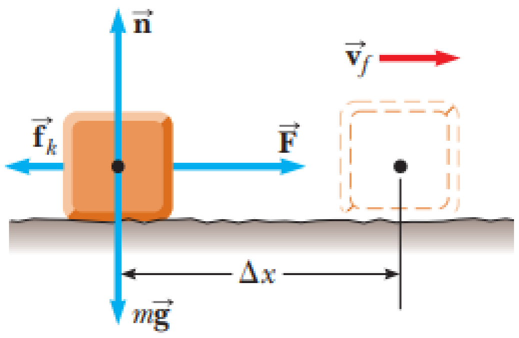
TEOREMA TRABAJO ENERGÍA CINÉTICA CON ROCE

Esto quiere decir que, si un cuerpo de masa m se desliza por una zona rugosa que tiene un largo D, debido a la acción de una fuerza de modulo F, se puede escribir la siguiente relación:

$$W_F = \Delta K + f_k \mathrm{D}$$

Problema 04:

Un bloque de masa m, inicialmente en reposo es empujado hacia la derecha a lo largo de una superficie con μ_k debido a la acción de una fuerza $\vec{F}$. ¿Qué velocidad alcanza luego de recorrer una distancia Δx ?



CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Experimentalmente se ha encontrado que la energía no se crea ni se destruye solo se conserva. Debido a esto, la energía total de un sistema solo cambia si hay una transferencia de energía desde el sistema al ambiente o viceversa. Matemáticamente esto se puede expresar como:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W + Q$$

O escrita de otra forma la expresión anterior, podemos tener una expresión más familiar:

$$\boldsymbol{K_f + U_f + \Delta E_{int} = W + Q + K_i + U_i}$$

SISTEMA AISLADO

Si un sistema está aislado, significa que **no hay interacción entre el sistema y el resto del universo.** Esto quiere decir que la expresión de la conservación de la energía se puede expresar como:

$$\Delta \mathrm{K} + \Delta U = 0$$

Donde, se define la energía mecánica de un sistema como:

$$E_{mec} = K + U$$

Entonces, podemos definir la conservación de energía en un sistema aislado como:

$$\Delta E_{mec} = 0$$

Problema 05:

Un bloque de masa m comprime un resorte de constante de fuerza k una longitud x. Al soltar la masa, esta se despega del resorte al pasar por su posición de equilibrio. Determine:

1. La velocidad de la masa al separarse del resorte.
2. ¿Qué distancia se debe comprar el resorte para que la velocidad sea el doble que la del ítem anterior? Exprese su resultado en función de variables conocidas

Solución:

Cuando el resorte es comprimido, se puede decir que tiene energía potencial elástica, por lo tanto, podemos decir que:

$$E_i = \frac{1}{2}kx^2$$

Una vez que la masa se comienza a mover, esta gana velocidad, por lo que cuando está en la posición de equilibrio del resorte se tiene que:

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2$$

Solución:

Por conservación de la energía:

$$\Delta E_{mec} = 0$$

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{k}{m}x^2$$

2) Si queremos obtener el doble de la velocidad luego de comprimir el resorte una longitud desconocida d, la energía para la masa es:

$$E_i = \frac{1}{2}kd^2$$

y luego, cuando la masa se separa del resorte la energía tiene un valor de:

$$E_f = \frac{1}{2}m(2v)^2$$

Solución:

Por conservación de la energía:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}kd^2 = 2mv^2$$

$$d^2 = 4\frac{m}{k}v^2$$

$$d^2 = 4x^2$$

CASO MÁS GENERAL

Considere un libro que cae por un plano inclinado rugoso de longitud D, al escribir la ecuación de conservación de energía podemos decir que:

$$\Delta \mathrm{K} + \Delta U = W$$

Que se puede escribir también como:

$$\Delta E_{mec} = W_{OF} - f_k D$$

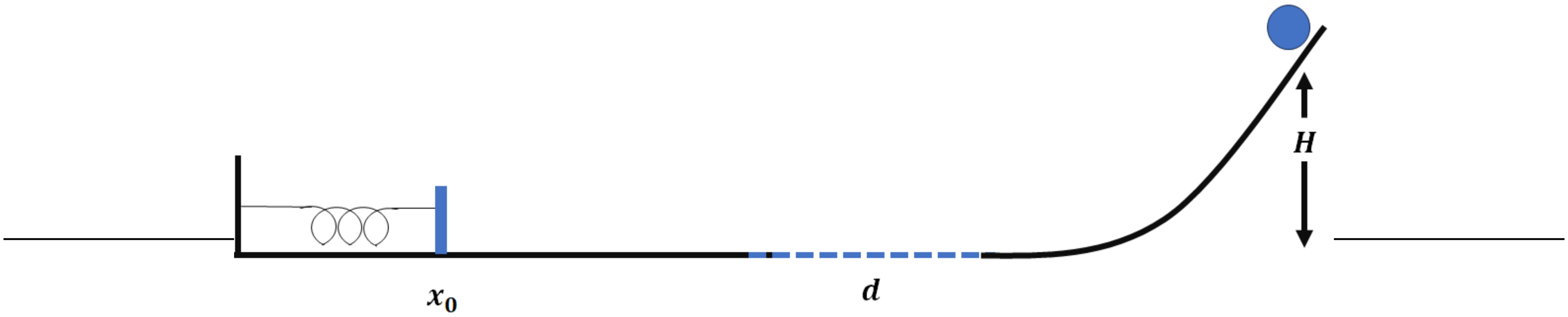
Lo que nos indica, que cualquier cambio en la energía mecánica de un sistema se va a deber a que existe una fuerza haciendo trabajo.

CASO MÁS GENERAL

Problema 06:

Considere un cuerpo de masa m que se encuentra a una altura H, queremos determinar la distancia L que se comprime el resorte de constante de restitución k. Además, considere que la trayectoria que va a seguir la masa tiene un tramo de largo d con coeficiente de roce μ_k. Para determinar la compresión calcule:

1. La velocidad de la masa m después de pasar por el segmento con roce en función de valores conocidos.
2. La distancia L que se comprime el resorte.
3. Si luego de comprimir el resorte, la masa m es eyectada siguiendo la misma trayectoria por la cual venía ¿La masa llega a la misma altura desde donde comenzó el movimiento? Justifique su respuesta.



CASO GENERAL

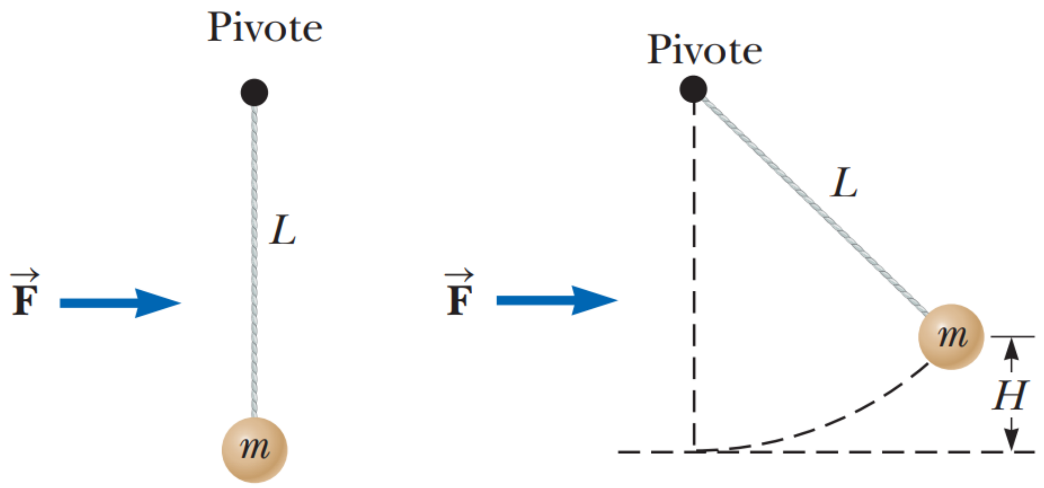
Problema 07:

Una bola de masa m se conecta mediante una cuerda resistente de longitud L a un pivote y se mantiene en su lugar con la cuerda vertical. Un viento ejerce fuerza constante $\vec{F}$ hacia la derecha sobre la bola. La bola se libera desde el reposo. El viento hace que se balancee para lograr altura máxima H sobre su punto de partida antes de que se balancee abajo de nuevo.

1. Determine el valor de H en función de variables conocidas.

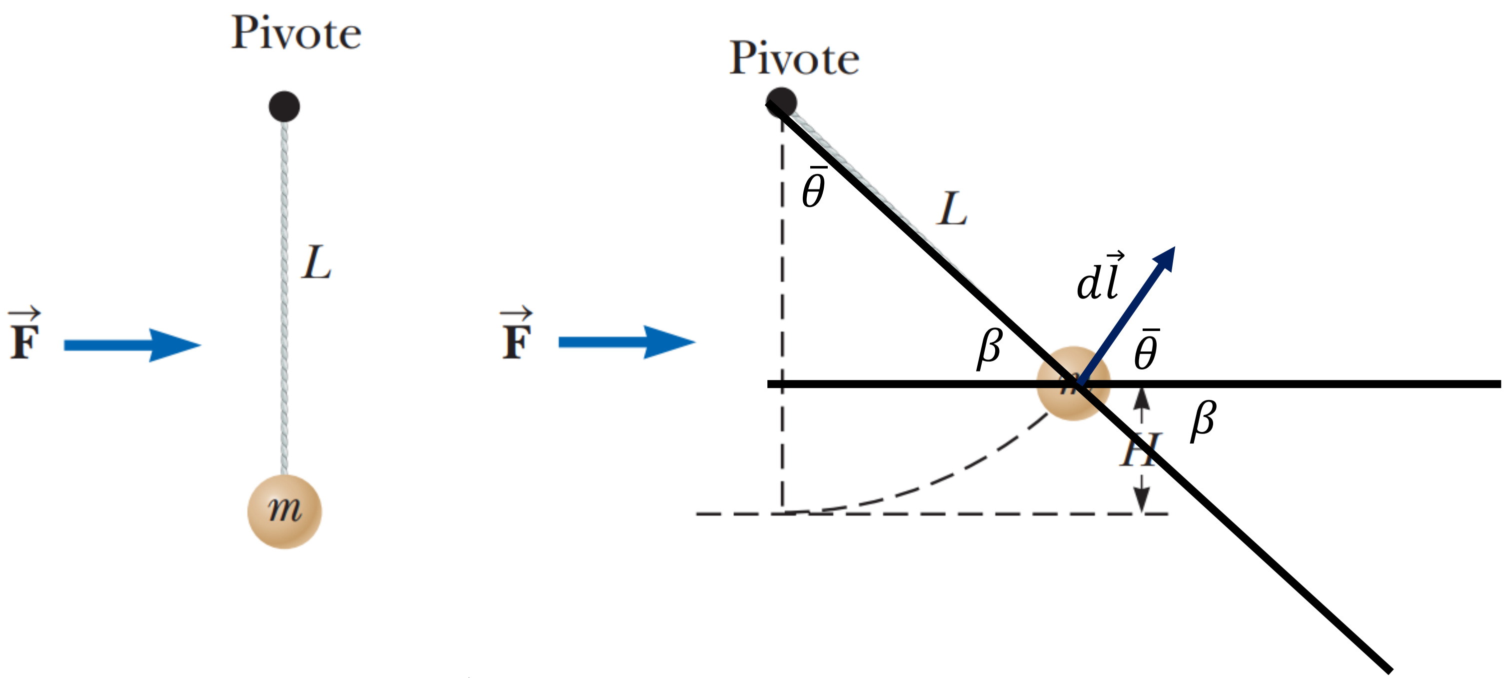
2. Ahora determine H utilizando conservación de energía.

3. ¿Cuál es el trabajo realizado para $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$?



CASO GENERAL

Solución:



$$d\vec{l} = dl\cos\bar{\theta}\ \hat{x} + dl\sin\bar{\theta}\ \hat{y}$$
$$dl = Ld\theta$$