Solución Prueba 02

Física 1

Fecha: 20 de Octubre de 2023 **Equipo docente de Física**

Nombre del Alumno:

CONSIDERACIONES IMPORTANTES

- Sus resultados deben estar expresados en términos de las variables algebraicas apropiadas. El resultado numérico, si corresponde, debe ser evaluado **al final** del ejercicio. **Cualquier reemplazo numérico durante el desarrollo no será considerado durante la revisión.**
- Todo desarrollo debe estar debidamente explicado, redactado y justificado. **Desarrollos sin justificación no serán considerados durante la revisión.**
- El desarrollo debe estar ordenado y legible. Recuerde que éste también se evalúa.
- Esta estrictamente prohibido el uso de celulares durante la prueba o cualquier otro dispositivo electrónico.
- Coloque su nombre en cada hoja que entregue.

SOBRE SITUACIONES DE COPIA Y/O PLAGIO

- En caso de detectar casos de copia y/o plagio, el profesor de la sección afectada dará a conocer los antecedentes de cada caso al equipo docente, que los analizará y tomará las medidas que correspondan, las que pueden llegar a la solicitud de un sumario administrativo formal a la autoridad que corresponda.

Solución Prueba 02

Física 1

Fecha: 20 de Octubre de 2023 **Equipo docente de Física**

Preguntas teóricas

Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta en cada caso.

1. ¿La aceleración en un movimiento circular uniforme es constante o variable? Responda en términos del vector asociado.

   Respuesta:
   El vector aceleración en un movimiento circular siempre apunta hacia el centro de la circunferencia. Debido a que la magnitud de la velocidad no varía, la magnitud de la aceleración tampoco, pero su dirección si. Debido a lo anterior, el vector aceleración es variable en el movimiento circular uniforme.

2. Un cuerpo de masa M esta en reposo sobre una superficie rugosa. Usted aplica una fuerza de modulo F para que este se empiece a mover. ¿Qué condiciones deben cumplirse para que el cuerpo se mueva? Una vez el cuerpo se mueve debido a $\vec{F}$ para que mantenga una aceleración constante ¿Usted puede relajarse y aplicar una fuerza de modulo menor o debe mantener la fuerza $\vec{F}$?

   Respuesta:
   Si el cuerpo esta en reposo sobre una superficie rugosa al aplicar una fuerza $\vec{F}$ aparece una fuerza de roce estático en el sentido contrario en que se aplica $\vec{F}$. Para que el cuerpo se mueva, $\vec{F}$ debe cumplir que su modulo debe ser mayor a la máxima fuerza de roce estático, matemáticamente $|\vec{F}| > \mu_s N$.
   Una vez el cuerpo se encuentra en movimiento, aparece una fuerza de roce cinética la cual es de modulo menor a la fuerza de roce estática, por lo tanto, si quiero que el cuerpo se mantenga con aceleración constante la fuerza $\vec{F}$ debe cumplir que $|\vec{F}| > \mu_k N$. En este caso el modulo de $\vec{F}$ puede ser menor a la aplicada para sacar al cuerpo del reposo para que el cuerpo se mantenga en movimiento con aceleración constante.

Solución Prueba 02

Física 1

Fecha: 20 de Octubre de 2023 **Equipo docente de Física**

Problema 1

Considere un resorte de constante k de longitud L que tiene una masa M adosada, al ser colocado de manera vertical se hace girar con velocidad angular ω formando un péndulo cónico de ángulo desconocido β como se observa en la figura. Si al girar se alarga ΔL metros el resorte, determine:

a) Diagrama de cuerpo libre sobre la masa M.

b) Determine el valor del estiramiento ΔL en función de M, ω, L y k

c) Determine el valor de β en función de variables conocidas.

d) Sea $k = 200,0\ (N/m)$, $M = 2,0(kg)$, $L = 75,0(cm)$ y $\omega = 5,0(rad/s)$, determine β y ΔL.

Realice un análisis dimensional de cada uno de sus resultados finales.

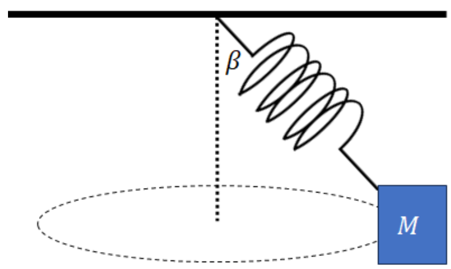

Figura 1: Representación del péndulo cónico utilizando un resorte de constante k .

Solución

a) Para realizar el DCL de la masa M vamos a considerar que está en la posición de la figura (1). Como se indica en el enunciado el resorte se estira una distancia ΔL, por lo tanto aparece una fuerza $\vec{F}_H$ elástica. Dicha fuerza se va a descomponer en su componente vertical y horizontal, F_{Hy} y F_{Hx}. Considerando lo anterior en la figura (2) item a) se dibuja la orientación de las fuerzas nombradas anteriormente y la fuerza peso.

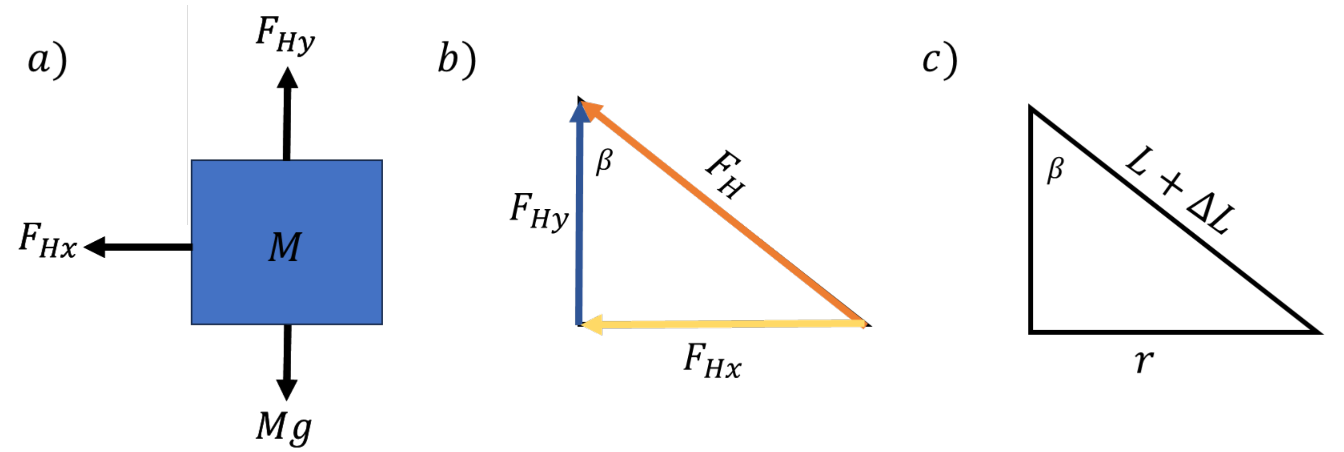

Figura 2: En a) se observa el DCL sobre la masa M, en b) se hace la descomposición del vector fuerza asociado al estiramiento del resorte, y en c) se observa la relación geometrica entre el largo del resorte estirado y el radio de giro de la masa M

b) Antes de determinar el estiramiento ΔL vamos a descomponer la fuerza $\vec{F}_H$. Considerando la figura (2,b) y definiendo $|\vec{F}_H| = F_H$ tenemos que:

$$F_H = k\Delta L$$
$$F_{Hx} = \sin\beta F_H$$
$$F_{Hy} = \cos\beta F_H$$

Aplicando la segunda ley de Newton sobre M para el eje vertical tenemos:

$$\sum F_y = 0$$
$$F_{Hy} - Mg = 0$$
$$k\Delta L\cos\beta = Mg \tag{1}$$

Ahora, considerando que el movimiento es circular uniforme aplicando la segunda ley de Newton en la dirección radial:

$$\sum F_r = -M\omega^2 r$$
$$F_{Hx} = M\omega^2 r$$
$$k\Delta L\sin\beta = M\omega^2 r \tag{2}$$

De la Figura (2,c) tenemos que :

$$\sin\beta = \frac{r}{(L + \Delta L)}$$

Utilizando la expresión anterior en (2):

$$\begin{aligned} k\Delta L \, \frac{r}{L+\Delta L} &= M\omega^2 r \\ \Delta L(k - M\omega^2) &= M\omega^2 L \\ \implies \Delta L &= \frac{M\omega^2 L}{k - M\omega^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Aplicando el análisis dimensional sobre la expresión anterior:

$$\begin{aligned} [\Delta L] &= \left[\frac{M\omega^2 L}{k - M\omega^2}\right] \\ &= \frac{MT^{-2}L}{MT^{-2} - MT^{-2}} \\ &= L \end{aligned}$$

c) Ahora para determinar el ángulo podemos proceder podemos despejar el coseno de (1):

$$\begin{aligned} k\Delta L \cos\beta &= Mg \\ \cos\beta &= \frac{Mg}{k\Delta L} \end{aligned}$$

Utilizando (3) en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{g(k - M\omega^2)}{k\omega^2 L} \\ \beta &= \cos^{-1}\left(g\frac{k - M\omega^2}{k\omega^2 L}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Realizando análisis dimensional, tenemos que:

$$\begin{aligned} [\cos\beta] &= \left[\frac{Mg}{k\Delta L}\right] \\ &= \frac{MLT^{-2}}{MT^{-2}L} \\ &= 1 \end{aligned}$$

d) Evaluando ambos resultados, teniendo en consideración ocupar L en metros:

$$\begin{aligned} \Delta L &= 0,25\ m \\ \beta &= 67^\circ \end{aligned} \tag{5}$$

Problema 2

Un objeto de masa m se encuentra sobre la superficie sin roce de un plano inclinado, con un ángulo de elevacion ϕ. La masa m se encuentra atada a una cuerda C, la cual en su otro extremo está atada a una masa M, la cual se encuentra sobre una superficie horizontal con roce, como se muestra en la Figura (3). La masa M y la superifice de contacto posee coeficientes de roce estático μ_s y μ_k. Al respecto

a) Realice el diagrama de cuerpo libre para cada uno de los cuerpos.

b) Demuestre que la expresión para el máximo valor que puede tener la masa m de modo que el sistema no deslice, en términos de las variables del enunciado, es:

$$m_{max} = \frac{\mu_s M}{sen(\phi)} \tag{6}$$

c) Si la masa m tiene un valor igual a $(1/4)m_{max}$, calcule el módulo de la fuerza de roce sobre el bloque M.

d) Si la masa m tiene un valor igual a $3m_{max}$, calcule el módulo de la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

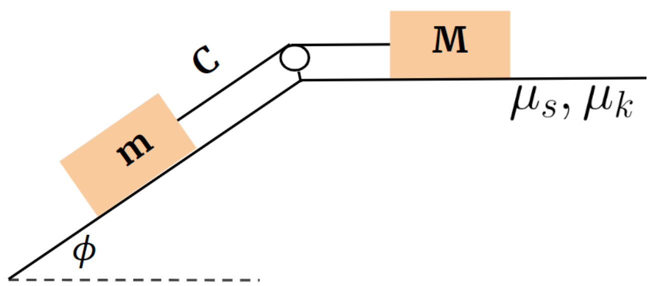

Figura 3:

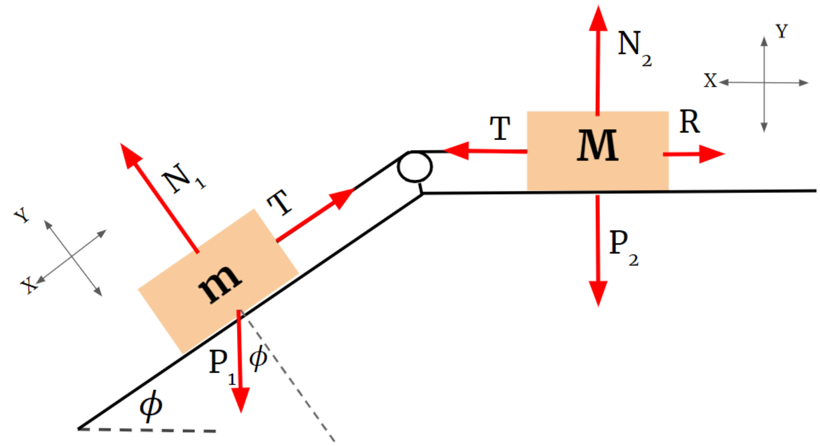

Figura 4: Representación de los diagramas de cuerpo libre de las dos masas del problema.

Solución

a) El cuerpo de masa m siente su fuerza peso $P_1 = mg$ apuntando al centro de la Tierra, la normal N_1 de contacto con el plano inclinado, apuntando perpendicular a la superficie de contacto y la fuerza de tensión T de la cuerda. El cuerpo de masa M también tiene su fuerza peso $P_2 = Mg$, una nornal vertical N_2, la tensión de la cuerda T y una fuerza de roce R en oposición al inminente movimiento, como se muestra en la figura (4)

b) Las ecuaciones de Newton del sistema en reposo son:

$$m \begin{cases} \hat{x} \rightarrow \quad mgsen(\phi) - T &= 0 \quad (m_x) \\ \hat{y} \rightarrow \quad N_1 - mgcos(\phi) &= 0 \quad (m_y) \end{cases} \tag{7}$$

$$M \begin{cases} \hat{x} \rightarrow \quad T - R &= 0 \quad (M_x) \\ \hat{y} \rightarrow \quad N_2 - Mg &= 0 \quad (M_y) \end{cases} \tag{8}$$

El máximo valor de m para que el sistema no deslice tiene relación con el máximo valor que puede tomar el roce estático R_s sobre el cuerpo M, en cuyo caso tomaría el valor $R_s = \mu_s N_2$, donde N_2 se despeja de la ecuación (M_y) y se reemplaza en la ecuación (M_x):

$$N_2 = Mg \tag{9}$$

$$T = \mu_s Mg \tag{10}$$

Considerando ahora las ecuaciones de la masa m, al reemplazar la expresión encontrada para la tensión T en la ecuación (m_x) se obtiene una condición para la masa máxima m_{max} de modo que el sistema no deslice:

$$m_{max} gsen(\phi) = \mu_s Mg \tag{11}$$

$$m_{max} = \frac{\mu_s M}{sen(\phi)} \tag{12}$$

c) Si $m = (1/4)m_{max}$ entonces el sistema estará en reposo, en cuyo caso el roce R de la masa M igualará a la tensión de la cuerda T, la cual se obtiene desde la ecuación (m_x):

$$R = T = mgsen(\phi) = \frac{\mu_s M}{4sen(\phi)} \cdot gsen(\phi) = \frac{\mu_s Mg}{4} \tag{13}$$

d) Si $m = 3m_{max}$ entonces el sistema se encuentra en movimiento, y las ecuaciones (m_x) y (M_x) ya no se igualan a cero. Además el roce entre la masa M y el plano horizontal será dinámico, por lo tanto tendrá un valor fijo $R_k = \mu_k \cdot N_2$, donde N_2 se despejó en la ecuación (9)

$$mgsen(\phi) - T = ma \tag{14}$$

$$T - \mu_k Mg = Ma \tag{15}$$

El sistema de ecuaciones se puede resolver sumando ambas ecuaciones

$$mgsen(\phi) - \mu_k Mg = (m + M)a \tag{16}$$

$$a = g\frac{msen(\phi) - \mu_k M}{m + M} \tag{17}$$

Reemplazando $m = 3m_{max} = 3\frac{\mu_s M}{sen(\phi)}$

$$a = g\frac{3\frac{\mu_s M}{sen(\phi)}sen(\phi) - \mu_k M}{3\frac{\mu_s M}{sen(\phi)} + M} \tag{18}$$

$$a = gsen(\phi)\frac{3\mu_s - \mu_k}{3\mu_s + sen(\phi)} \tag{19}$$

Con ello encontramos el módulo de la aceleración, y así también el módulo de la tensión

$$T = \mu_k Mg + Mgsen(\phi)\frac{3\mu_s - \mu_k}{3\mu_s + sen(\phi)} \tag{20}$$

$$T = Mg\Big(\frac{\mu_k(3\mu_s + sen(\phi)) + sen(\phi)(3\mu_s - \mu_k)}{3\mu_s + sen(\phi)}\Big) \tag{21}$$

$$T = Mg\Big(\frac{3\mu_k\mu_s + 3\mu_s sen(\phi)}{3\mu_s + sen(\phi)}\Big) \tag{22}$$

$$T = 3Mg\mu_s\Big(\frac{\mu_k + sen(\phi)}{3\mu_s + sen(\phi)}\Big) \tag{23}$$