Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Ayudantía 11
Funciones Logaritmo y Aplicaciones de la integral (área entre curvas y sólidos de revolución)

10/11/2023

En este taller, aplicaremos el cálculo integral para calcular el área entre dos curvas. También, aplicaremos el cálculo integral para calcular el volumen de un sólido de revolución que se obtiene al hacer girar el gráfico de una función en torno a un eje.
Por otro lado, aplicaremos el cálculo diferencial para obtener el gráfico de una función logarítmica en un contexto científico.

Objetivos:

- Aplicar el cálculo integral para calcular el área entre dos curvas.
- Aplicar métodos de integración para calcular integrales definidas.
- Aplicar el teorema del valor medio para integrales.
- Calcular el volumen de un sólido de revolución en un problema contextualizado.
- Realizar análisis gráfico de la función logaritmo compuesta con funciones conocidas.

Ejercicios Propuestos

1. Un grupo de científicos ha decidido cambiar un cultivo de un ecosistema a otro para verificar si es capaz de adaptarse al nuevo ecosistema. En tal experimento se ha modelado la población del cultivo (en miles) mediante la función

$$f(t) = \ln((t-1)^2 + e^2 - 1),$$

donde t corresponde al tiempo medido en días a partir del instante $t = 0$.

a) Determine la población inicial del cultivo.

Solución: La población inicial del cultivo corresponde a la evaluación de la función f en el instante inicial de la medición, es decir,

$$f(0) = \ln((0-1)^2 + e^2 - 1) = \ln e^2 = 2.$$

En efecto, la población inicial fue de 2000 especímenes.

b) Determine la población mínima y el instante en que se alcanzó tal población. ¿Se extingue la especie?

Solución: Para determinar la población mínima note que la función f es diferenciable y su derivada está dada por

$$f'(t) = \frac{2(t-1)}{(t-1)^2 + e^2 - 1}.$$

Luego,

$$f'(t) = 0 \iff \frac{2(t-1)}{(t-1)^2 + e^2 - 1} = 0 \iff t = 1,$$

por lo tanto, el único punto crítico de f está en $t = 1$. Luego, para determinar si es máximo o mínimo estudiamos los signos de la función f'

	$[0, 1[$	$]1, +\infty[$
$2(t-1)$	$-$	$+$
$(t-1)^2 + e^2 - 1$	$+$	$+$
$f'(t)$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Además,

$$f(1) = \ln((1-1)^2 + e^2 - 1) = \ln(e^2 - 1).$$

Para decidir si la especie se extingue o no, debemos analizar el número $\ln(e^2 - 1)$; si este es positivo, entonces la especie no se extinguirá. Ahora, para comprobar que tal número es positivo, basta con verificar si $e^2 - 1$ es mayor que 1, ya que la función logaritmo natural cambia de signo precisamente en el valor 1. Tenemos

$$2 < e < 3 \iff 4 < e^2 < 9 \iff 3 < e^2 - 1 < 8.$$

De esta forma, como la función logaritmo natural es creciente

$$e^2 - 1 > 1 \iff \ln(e^2 - 1) > \ln(1) \iff \ln(e^2 - 1) > 0.$$

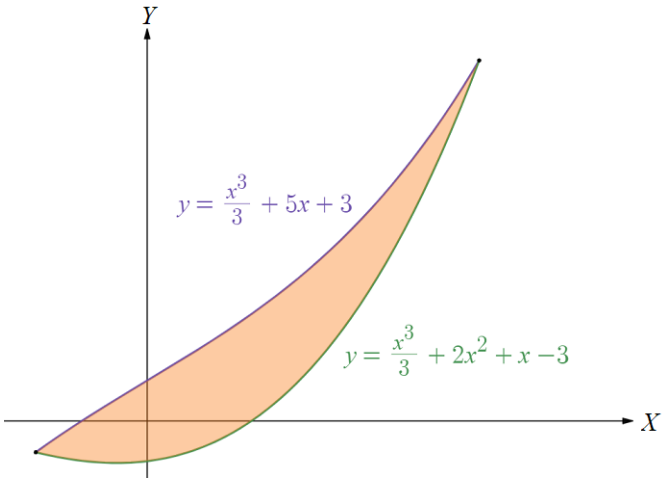
Por esta razón, como $f(1) > 0$ y la función f alcanza su mínimo en $t = 1$. Se concluye que la población no se extingue, ya que la población mínima es una magnitud positiva.

2. Calcule el área sombreada entre las curvas $y = \frac{x^3}{3} + 5x + 3$ e $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 3$, que se muestra en la siguiente figura:

Solución: Primero debemos encontrar las abscisas de los puntos de intersección de las curvas, y para esto igualamos las ordenadas y resolvemos para x:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{3} + 5x + 3 &= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 3 \\ 0 &= 2x^2 - 4x - 6 \\ 0 &= 2(x+1)(x-3), \end{aligned}$$

de lo que éstas se intersectan cuando $x = -1$ y cuando $x = 3$.

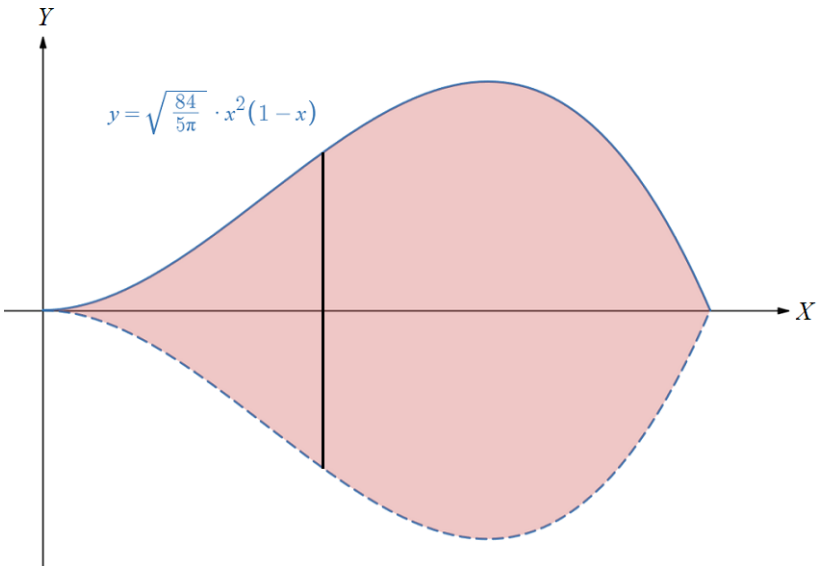


Ahora, como $y = \dfrac{x^3}{3} + 5x + 3$ está arriba de la curva $y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 3$ para todo $x \in [-1, 3]$, obtenemos que el área sombreada es:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} \left(\frac{x^3}{3} + 5x + 3 - \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 3 \right) \right) dx &= \int_{-1}^{3} \left(-2x^2 + 4x + 6 \right) dx \\ &= \left(\frac{-2x^3}{3} + 2x^2 + 6x \right) \Bigg|_{-1}^{3} \\ &= (-18 + 18 + 18) - (2/3 + 2 - 6) \\ &= 64/3.\end{aligned}$$

Es decir, el área de la región sombreada entre las curvas es $64/3$.

3. A partir de un trozo de madera, se tallará en un torno un trompo con la siguiente silueta (en azul):



La curva superior (que se muestra continua) es $y = \sqrt{\frac{84}{5\pi}} \cdot x^2(1-x)$, y la inferior (que se muestra entrecortada) es su reflejo con respecto al eje X, vista la simetría que le dará el torneado al trompo. Acá, ambos ejes miden en decímetros.

a) Demuestre que el volumen del trompo es de 160 [cm^3].

b) El segmento de recta vertical (en negro) muestra el ancho del trompo en un punto. ¿Cuál es el ancho promedio del trompo?

Solución: Para ambos ítem debemos integrar entre los cortes de la curva con el eje X, es decir, entre los x tales que $y = 0$:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ \sqrt{\frac{84}{5\pi}} \cdot x^2(1-x) &= 0 \\ x(1-x) &= 0, \end{aligned}$$

de lo que debemos integrar entre 0 y 1.

a) El volumen del trompo, en [dm^3] está dado por la fórmula

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{84}{5\pi}} \cdot x^2(1-x) \right)^2 dx &= \pi \int_0^1 \frac{84}{5\pi} \cdot x^4(1-x)^2 dx \\ &= \frac{84}{5} \int_0^1 x^4 \left(1 - 2x + x^2\right) dx \\ &= \frac{84}{5} \int_0^1 \left(x^4 - 2x^5 + x^6\right) dx \\ &= \frac{84}{5} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^7}{7} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{84}{5} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) \\ &= \frac{84}{5} \cdot \frac{1}{105} = \frac{4}{25} = 0{,}16. \end{aligned}$$

Se sigue que el volumen es 0.16 [dm^3]. Como 1 [dm^3] es igual a 1000 [cm^3], obtenemos finalmente que el volumen del trompo es de 160 [cm^3].

b) El ancho promedio será

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-0}\int_0^1 2\sqrt{\frac{84}{5\pi}}\cdot x^2(1-x)dx &= 2\sqrt{\frac{84}{5\pi}}\cdot\int_0^1 \left(x^2-x^3\right)dx\\ &= 2\sqrt{\frac{84}{5\pi}}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1\\ &= 2\sqrt{\frac{84}{5\pi}}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{84}{5\pi}}\approx 0{,}385,\end{aligned}$$

es decir, el ancho promedio es aproximadamente 0,385 [dm].