Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Solución Ayudantía 10
Funciones Logaritmo y Exponencial
03/11/2023

En este taller, integraremos funciones que involucran a las funciones logaritmo y exponencial. Para ello, usaremos los métodos de integración ya vistos y las propiedades de dichas funciones. Además, esbozaremos los gráficos de funciones que en su regla de correspondencia incluyen a las funciones logaritmo y exponencial; esto lo haremos utilizando la información conocida de las funciones en cuestión como su derivada, su dominio, etc. Finalmente, trabajaremos con un problema de contexto cuyo modelo sea del tipo exponencial.

Objetivos:

- Aplicar los métodos de integración para la resolución de integrales definidas e indefinidas que involucren funciones logarítmicas y exponenciales.
- Calcular primeras y segundas derivadas aplicando las reglas de derivación para graficar funciones logarítmicas y exponenciales.
- Realizar análisis gráfico de funciones que incluyen en su regla de correspondencia a las funciones logaritmo y exponencial.
- Resolver problemas de modelamiento que involucren a la función exponencial.

Ejercicios Propuestos

1. Resuelva las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)-2}{x}dx.$

   Solución: En primer lugar, aplicando propiedad de linealidad, se tiene

$$\int \frac{\ln^3(x)-2}{x}dx = \underbrace{\int \frac{\ln^3(x)}{x}dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{2}{x}dx}_{I_2}$$

- Para I_1: hacemos el cambio de variable

$$u = \ln(x) \qquad \Longrightarrow \qquad du \; = \frac{dx}{x}$$

Así,

$$\int \frac{\ln^3(x)}{x} dx = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + c_1 = \frac{\ln^4(x)}{4} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

- Para I_2: notemos que

$$\frac{d}{dx}(2\ln(x)) = \frac{2}{x}$$

Por lo cual,

$$\int \frac{2}{x} dx = 2\ln(x) + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\ln^3(x) - 2}{x} dx = \frac{\ln^4(x)}{4} - 2\ln(x) + k, \qquad k \in \mathbb{R}\,.$$

b) $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x) dx.$

Solución: Consideremos

$$\begin{array}{lcl} u = \cos(x) & \Longrightarrow & du = -\operatorname{sen}(x)dx \\ dv = e^x dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{array}$$

Luego, integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\, dx &= e^x \cos(x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\, dx \\ &= 0 - \cos\big(-\frac{\pi}{4}\big)e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\, dx \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\, dx \end{aligned}$$

Ahora, considerando

$$\begin{array}{cc} f = \operatorname{sen}(x) & g' = e^x dx \\ f' = \cos(x)dx & g = e^x \end{array}$$

e integrando por partes se tiene,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\, dx &= e^x \operatorname{sen}(x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\, dx \\ &= -\operatorname{sen}\big(-\frac{\pi}{4}\big)e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\, dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\, dx \end{aligned}$$

Ahora, volviendo a nuestra integral original, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx &= -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx = 1 - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx\ .$$

De donde,

$$2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+4}dx.$

Solución: En primer lugar resolvemos la integral indefinida, para ello, manipulando algebraicamente la expresión, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+4}\,dx &= \int \frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{x^2+4}\,dx \\ &= \underbrace{\int \frac{x}{x^2+4}\,dx}_{J_1} + \underbrace{\int \frac{3}{x^2+4}\,dx}_{J_2}\end{aligned}$$

Donde,

- Para J_1, hacemos el cambio de variables

  $$w = x^2 + 4 \qquad \Longrightarrow \qquad dw = 2x\ dx,$$

  entonces,

  $$x\ dx = \frac{dw}{2}$$

  Por lo cual, la integral en términos de la nueva variable está dada por

  $$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,dw\ .$$

  En efecto,

  $$\frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,dw = \frac{1}{2}\ln(w) + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

  Ahora, volviendo a la variable original, se tiene

  $$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

- Para J_2, notemos que
$$\int \frac{3}{x^2+4}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx.$$
Luego, hacemos el cambio de variables
$$u = \frac{x}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad du = \frac{dx}{2}.$$
De manera que,
$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du\\ &= \frac{3}{2}\arctan(u)+c, \qquad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$
Por lo tanto,
$$\int \frac{3}{x^2+4}\,dx = \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c, \qquad c\in\mathbb{R}$$

Finalmente, ahora conocidas J_1 y J_2, obtenemos
$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+4}\,dx &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4)+k+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c, \qquad c,k\in\mathbb{R}.\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+l, \qquad l\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$
donde, $l=c+k$ es una nueva constante. Por lo tanto, ahora evaluando la integral definida, se tiene
$$\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^2 = \frac{3\pi}{8}+\ln(\sqrt{2})\,.$$

2. Considere las funciones $f :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=xe^{-x}$.

   a) Aplique el cálculo diferencial para obtener el gráfico de f y de g haciendo un análisis completo de ambas funciones.

   Solución:

   - Para $f :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, notemos que la función f es diferenciable para $x>0$ pues la función logaritmo natural lo es, además,
   $$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\cdot\ln(x)+\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{1}{x^2}\big(1-\ln(x)\big).\end{aligned}$$

Cuyo dominio coincide con el dominio de f, $]0, \infty[$. Luego, estudiamos el signo de la expresión, para esto consideramos la igualdad

$$\begin{aligned} 1 - \ln(x) = 0 \quad & \iff \quad \ln(x) = 1 \\ & \iff \quad x = e \end{aligned}$$

Ahora, como $f'(x)$ es continua en el intervalo $]0, \infty[$ ya que la función logaritmo lo es, además, $f'(e) = 0$ entonces, por teorema de Bolzano, f' tiene un único signo en el intervalo $]0, e[$ y un único signo en el intervalo $]e, \infty[$. Notemos que

$$f'(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad f'(e^2) = -\frac{1}{e^4} \; < \; 0$$

de manera que

	$x \in]0, e[$	$x = e$	$x \in]e, \infty[$
x^2	$+$	$+$	$+$
$-(\ln(x) - 1)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

Por lo tanto, f es decreciente para $x \in \; [e, \infty[$ y f es creciente para $x \in \;]0, e[$.

Además, f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, en efecto, calculamos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

Donde, tanto $\varphi_1(x) = \ln(x)$ como $\varphi_2(x) = x$ son funciones diferenciables y

$$\lim_{x \to \infty} \varphi_1(x) = \lim_{x \to \infty} \varphi_2(x) = \infty.$$

Por lo cual,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Luego, por teorema de L'hôpital se tiene que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Es decir, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Ahora, podemos notar que la función f' es diferenciable en su dominio y

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}(1 - \ln(x)) + \frac{1}{x^2} \cdot -\frac{1}{x} = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}.$$

Con lo cual, por una lado podemos deducir que los puntos de inflexión de f son lo $x > 0$ tales que

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\iff \quad \frac{2\ln(x) - 3}{x^3} \\ &\iff \quad 2\ln(x) - 3 = 0 \\ &\iff \quad \ln(x) = \frac{3}{2} \\ &\iff \quad x = e^{\frac{3}{2}}\,. \end{aligned}$$

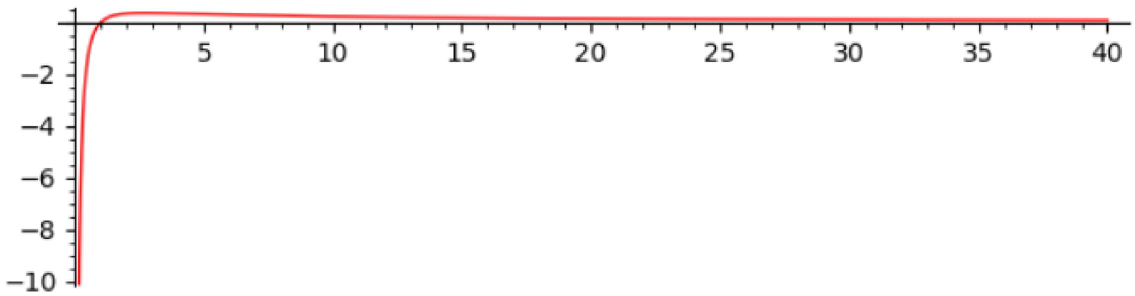
Por otro lado, analizando los signos de f'', se tiene

	$x \in]0, e^{\frac{3}{2}}[$	$x = e^{\frac{3}{2}}$	$x \in]e^{\frac{3}{2}}, \infty[$
x^3	$+$	$+$	$+$
$2\ln(x) - 3$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba en los $x \in]e^{\frac{3}{2}}, \infty[$ y cóncava hacia abajo en lo $x \in]0, e^{\frac{3}{2}}$. Además, $f''(e) < 0$ por lo que en $x = e$ hay un máximo de f cuyo valor es

$$f(e) = e^{-1}\,.$$

En virtud de lo anterior podemos concluir que la gráfica de f está dada por



- Para $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = xe^{-x}$, en primer lugar, notemos que g es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada está dada por

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x),$$

Además,

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \quad &\iff \quad e^{-x}(1 - x) = 0 \\ &\iff \quad 1 - x = 0 \\ &\iff \quad x = 1\,. \end{aligned}$$

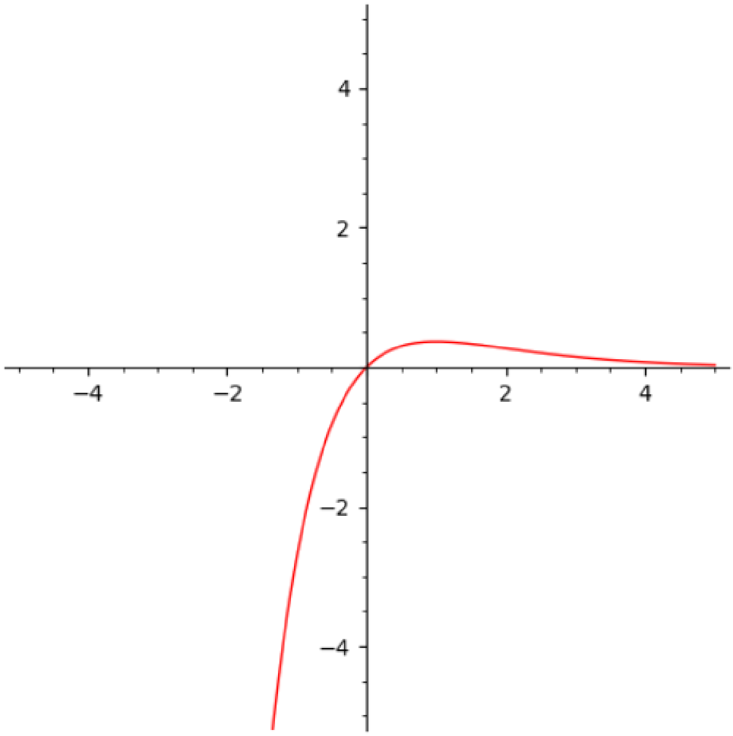
Además, dado que para todo $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} \geq 0$, podemos concluir que g es creciente para los $x \in] - \infty, 1]$ y decreciente para los $x \in]1, \infty[$. Además, f' es diferenciable y

$$g''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{x} = (x - 2)e^{-x}\,.$$

Por lo cual g tiene un punto de inflexión en $x = 2$ y es cóncava hacia arriba para los $x \in]-\infty, 2[$ y cóncava hacia abajo para los $x \in]2, \infty[$.
Por último, $g''(1) < 0$ y por lo tanto en $x = 1$ hay un máximo de g cuyo valor es

$$g(1) = e^{-1}\,.$$

En virtud de lo anterior, podemos concluir que la gráfica de g está dada por



Solución: Dado que f tiene un máximo absoluto en $x = e$ cuyo valor es $f(e) = e^{-1} < 1$. Entonces, para todo $x \in]0, \infty[$ se tiene,

$$f(x) \leq e^{-1} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\ln(x)}{x} < 1,$$

por lo tanto

$$\forall x \in]0, \infty[:\ \ln(x) < x\,.$$

Por otro lado, empleando el mismo argumento, notamos que g tiene un máximo absoluto en $x = 1$ por lo cual para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$g(x) \leq e^{-1} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad xe^{-x} < 1\,.$$

Por lo tanto, $\forall x \in \mathbb{R}\colon x < e^x$

c) ¿Existe un número real x tal que $\ln(x) = e^x$?

Solución: En virtud de lo anterior para $x > 0$ se tiene

$$\ln(x) < x \qquad \text{y} \qquad x \leq e^x$$

por lo tanto, para todo $x > 0$,

$$\ln(x) < e^x\,.$$

Por lo tanto, no hay un número real que satisfaga la ecuación $e^x = \ln(x)\,$.

3. Una población de bacterias inicia con 100 de éstas, y la población se triplica cada 2 horas. Llame $P(t)$ a la cantidad de bacterias en el instante t medido en horas, con $t \geq 0$.

   a) Muestre que una fórmula razonable para $P(t)$, donde t es una variable continua, es

$$P(t) = 100 \cdot 3^{t/2}, \;\; t \geq 0.$$

Solución: Si x denota el periodo de triplicación, la situación anterior arrojaría, por ejemplo, los valores

x	0	1	2	3
$P(t)$	100	300	900	2700

.

De manera que es razonable pensar que en términos de x el modelo que proporciona la población de bacterias está dado por

$$P(x) = 100 \cdot 3^x.$$

Sin embargo, nos interesa el modelo en términos del tiempo en horas, para esto notemos que $x = \dfrac{t}{2}$ representa el tiempo transcurridos en unidades de x (periodo de triplicación), de manera que componiendo ambas funciones obtenemos que un modelo razonable en términos del tiempo en horas para la población está dado por $P : [0, \infty[\to [100, \infty[$ cuya regla de asignación es

$$P(t) = 100 \cdot 3^{t/2}.$$

Observación: Otra manera de deducir el modelo consiste en notar que el tamaño de la población en periodos fijos de tiempo se multiplica por un factor fijo, este factor depende del periodo de tiempo, que en este caso, cada 2 horas se triplica, es decir, el factor es 3, entonces el modelo para la población con el tiempo medido en horas es un modelo exponencial, vale decir, un modelo de la forma

$$P(t) = Me^{kt},$$

donde t se mide en horas. Ahora, como $P(0) = 100$ se tiene

$$P(0) = 100 \qquad \Longleftrightarrow \qquad M = 100.$$

Además, como $P(2) = 300$ se tiene

$$\begin{aligned} P(2) = 300 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 100e^{2k} = 300 \\ &\Longleftrightarrow \qquad e^{2k} = 3 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 2k = \ln(3) \\ &\Longleftrightarrow \qquad k = \frac{\ln(3)}{2} \end{aligned}$$

De manera que la función que modela el crecimiento de la población está dada por

$$\begin{aligned} P : [0,\infty[&\to [100,\infty[\\ x &\mapsto 100e^{\frac{\ln(3)t}{2}} = 100 \cdot 3^{t/2} \end{aligned}$$

b) ¿Cuántas horas deben transcurrir para que la población de bacterias sea igual a 800?

Solución: Para determinar lo solicitado, sea τ el tiempo transcurrido hasta que la población sea 800 bacterias, es decir,

$$P(\tau) = 800 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 100 \cdot 3^{\tau/2} = 800,$$

de donde, despejando τ se tiene

$$100 \cdot 3^{\tau/2} = 800 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3^{\tau/2} = 8,$$

entonces,

$$\frac{\tau}{2} = \log_3(8) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tau = 2\log_3(8) \approx 3,7855.$$

Por lo tanto, deben transcurrir aproximadamente $3,7$ horas para que la población de bacterias sea 800.

c) Encuentre una función que modele la velocidad de crecimiento de la población de bacterias. ¿Cuál será esta velocidad a las 12 horas?

Solución: Dado que la función $P(t)$ definida inicialmente representa la población de bacterias, entonces la derivada temporal de P representa la razón de cambio de esta población, es decir, $P'(t)$ representa la velocidad de crecimiento de la población. Particularmente en nuestro caso, la función $P(t)$ toma valores positivos de manera que

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{\ln(P(t))} \\ &= e^{\ln(100\cdot 3^{t/2})} \\ &= e^{\ln(100)+\ln(3^{t/2})} \\ &= e^{\ln(100)} \cdot e^{\ln(3^{t/2})} \\ &= 100\, e^{\frac{t}{2}\ln(3)} \end{aligned}$$

Por lo cual,

$$P(t) = 100 \cdot 3^{t/2} = 100\, e^{\frac{t}{2}\ln(3)},$$

Además, observemos que la función P es diferenciable en todos los números reales, en particular para $t > 0$ y la función derivada está dada por

$$P'(t) = \frac{d}{dt}\big(100\, e^{\frac{t}{2}\ln(3)}\big) = 100\, e^{\frac{t}{2}\ln(3)} \cdot \left(\frac{\ln(3)}{2}\right) = 50\ln(3)e^{\frac{t}{2}\ln(3)}.$$

Además,

$$\begin{aligned} P'(12) &= 50\ln(3)e^{\frac{12}{2}\ln(3)} \\ &= 50\ln(3)e^{6\ln(3)} \\ &= 50\ln(3)e^{\ln(3^6)} \\ &= 50\cdot 3^6\ln(3). \end{aligned}$$

Por consiguiente, la velocidad de crecimiento de la población a las 12 horas está dada por $36\,450\ln(3) \approx 17\,391,0697 \left[\dfrac{\text{bacterias}}{h}\right]$.

d) Se define $q(t) = \dfrac{P(t)-100}{t}$, determine $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{P(t)-100}{t}$.
Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{P(t)-100}{t} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{100\cdot 3^{\frac{t}{2}}-100}{t} \\ &= 100\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{t}{2}}-1}{t}. \end{aligned}$$

Donde las funciones $\varphi_1(t) = 3^{\frac{t}{2}}-1$ y $\varphi_2(t) = t$ son diferenciables y satisfacen

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi_1(t) = 0 = \lim_{t\to 0^+} \varphi_2(t).$$

Además,

$$\varphi_1'(t) = 3^{\frac{t}{2}}\frac{\ln(3)}{2} \qquad \text{y} \qquad \varphi_2'(t) = 1$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{t}{2}}-1}{t} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{t}{2}}\frac{\ln(3)}{2}}{1} = \frac{\ln(3)}{2}.$$

Es decir, mediante la regla de L'hopital podemos concluir que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{P(t)-100}{t} = 100\cdot\frac{\ln(3)}{2} = 50\ln(3).$$