Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
2*do* semestre de 2022

Ayudantía 9
Integración
20/10/2023

En esta ayudantía haremos uso de los distintos métodos de integración para resolver integrales definidas e indefinidas.

Objetivos:

- Aplicar los métodos de integración para la resolución de integrales definidas e indefinidas.

Ejercicios Propuestos

1. Resuelva la integral indefinida $\int (2-x)^2 dx$ de dos maneras:

   a) Resolviendo el cuadrado de binomio y después integrando.

   Solución: En primer lugar, desarrollando la expresión a integrar y usando la propiedad de linealidad, se tiene

$$\begin{aligned}\int (2-x)^2\, dx &= \int 4 - 4x + x^2\, dx \\ &= 4 \cdot \int 1\, dx - 4 \cdot \int x\, dx + \int x^2\, dx \\ &= 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + c_1\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

   b) Mediante la sustitución $u = 2 - x$.

   Solución: Hacemos el cambio de variable

$$u = 2 - x \qquad \Longrightarrow \qquad du = -\, dx$$

   Así,

$$\int (2-x)^2\, dx = -\int u^2\, du = -\frac{u^3}{3} + c_2\,, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

   Ahora, volviendo a la variable original, se concluye que

$$\int (2-x)^2\, dx = -\frac{1}{3}(2-x)^3 + c_2\,.$$

Discuta por qué ambos resultados son iguales.

Solución: Los resultados anteriores son aparentemente distintos pues $f(x) = (2-x)^2$ posee una familia de funciones (primitivas) todas con la característica que su primera derivada es f. Además, si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son las primitivas de f obtenidas en *a*) y *b*) respectivamente, entonces,

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{constante}$$

de hecho,

$$F_1(x) - F_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + \frac{1}{3}(8 - 12x + 6x^2 - x^3) = \frac{8}{3}\,.$$

Por lo tanto, ambas soluciones se diferencian por un número y esa es la importancia de la constante de integración.

2. Resuelva las siguientes integrales utilizando, en algún momento, el método de sustitución.

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(x)dx$

   Solución: En primer lugar notemos que

$$\operatorname{sen}^3(x) = \operatorname{sen}(x)\big(1 - \cos^2(x)\big) = \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)$$

   Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(x)\,dx &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\,dx\end{aligned}$$

   Ahora, haciendo la sustitución

$$t = \cos(x) \qquad \Longrightarrow \qquad dt = -\operatorname{sen}(x)\,dx$$

   y

$$t(0) = 1 \qquad \text{y} \qquad t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

   Así,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\,dx = -\int_1^0 t^2\,dt = -\frac{t^3}{3}\Big|_1^0 = \frac{1}{3}\,.$$

Además,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} = 1\,.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\,dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

b) $3\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3+x}}{x}dx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$

Solución: En primer lugar, en virtud de la propiedad de linealidad, se tiene

$$3\int \frac{\sqrt{x^3+x}}{x}dx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = \int \frac{3\sqrt{x^3+x}}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^3+x}}\,dx = \int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}\,dx$$

Luego, haciendo la sustitución

$$u = x^3 + x \qquad \Longrightarrow \qquad du = (3x^2+1)\,dx$$

se tiene,

$$\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c, \in \mathbb{R}$$

Por ultimo, volviendo a la variable original, se tiene

$$\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}\,dx = 2\sqrt{x^3+x} + c, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Es decir,

$$3\int \frac{\sqrt{x^3+x}}{x}dx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = 2\sqrt{x^3+x} + c, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

3. Resuelva las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)dx$

Solución: Consideremos

$$\begin{aligned} u &= \cos(x) \qquad &\Longrightarrow \qquad du &= -\operatorname{sen}(x)dx \\ dv &= e^x dx \qquad &\Longrightarrow \qquad v &= e^x \end{aligned}$$

Luego, integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx &= e^x \cos(x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \\ &= 0 - \cos\big(-\frac{\pi}{4}\big)e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx\end{aligned}$$

Ahora, considerando

$$\begin{aligned} f &= \operatorname{sen}(x) & g' &= e^x dx \\ f' &= \cos(x)dx & g &= e^x\end{aligned}$$

e integrando por partes se tiene,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx &= e^x \operatorname{sen}(x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx \\ &= -\operatorname{sen}\big(-\frac{\pi}{4}\big)e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx\end{aligned}$$

Ahora, volviendo a nuestra integral original, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx &= -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx = 1 - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx\ .$$

De donde,

$$2\cdot\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}(x)dx$

Solución: Consideremos

$$\begin{aligned} u = \operatorname{arc\,sen}(x) \qquad &\Longrightarrow \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dv = dx \qquad &\Longrightarrow \qquad v = x \end{aligned}$$

Luego, integrando por partes, se tiene

$$\int \operatorname{arc\,sen}(x)\,dx = x\operatorname{arc\,sen}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Luego, hacemos la sustitución

$$t = 1 - x^2 \qquad\qquad du = -2x\,dx$$

de esta forma

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot 2t^{1/2} + k = -\sqrt{1-x^2}$$

Por lo tanto, reemplazando en la integral original, se concluye que

$$\int \operatorname{arc\,sen}(x)\,dx = x\operatorname{arc\,sen}(x) + \sqrt{1-x^2} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Observación: Otra manera menos natural es primero hacer la sustitución $x = \operatorname{sen}(u)$ y después integrar por partes.