Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Ayudantía 10
Funciones Logaritmo y Exponencial
03/11/2023

En este taller, integraremos funciones que involucran a las funciones logaritmo y exponencial. Para ello, usaremos los métodos de integración ya vistos y las propiedades de dichas funciones. Además, esbozaremos los gráficos de funciones que en su regla de correspondencia incluyen a las funciones logaritmo y exponencial; esto lo haremos utilizando la información conocida de las funciones en cuestión como su derivada, su dominio, etc. Finalmente, trabajaremos con un problema de contexto cuyo modelo sea del tipo exponencial.

Objetivos:

- Aplicar los métodos de integración para la resolución de integrales definidas e indefinidas que involucren funciones logarítmicas y exponenciales.
- Calcular primeras y segundas derivadas aplicando las reglas de derivación para graficar funciones logarítmicas y exponenciales.
- Realizar análisis gráfico de funciones que incluyen en su regla de correspondencia a las funciones logaritmo y exponencial.
- Resolver problemas de modelamiento que involucren a la función exponencial.

Ejercicios Propuestos

1. Resuelva las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x) - 2}{x}dx.$

   b) $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)dx.$

   c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+4}dx.$

2. Considere las funciones $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = xe^{-x}$.

   a) Aplique el cálculo diferencial para obtener el gráfico de f y de g haciendo un análisis completo de ambas funciones.

   b) A partir del item a), demuestre que $ln(x) < x$ para todo $x > 0$ y que $x < e^x$ para todo número real x.

   c) ¿Existe un número real x tal que $ln(x) = e^x$?

3. Una población de bacterias inicia con 100 de éstas, y la población se triplica cada 2 horas. Llame $P(t)$ a la cantidad de bacterias en el instante t medido en horas, con $t \geq 0$.

   a) Muestre que una fórmula razonable para $P(t)$, donde t es una variable continua, es $P(t) = 100 \cdot 3^{t/2}, \;\; t \geq 0.$

   b) ¿Cuántas horas deben transcurrir para que la población de bacterias sea igual a 800?

   c) Encuentre una función que modele la velocidad de crecimiento de la población de bacterias. ¿Cuál será esta velocidad a las 12 horas?

   d) Se define $q(t) = \dfrac{P(t) - 100}{t}$, determine $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \dfrac{P(t) - 100}{t}$.