



Ayudantía 8

Primitivas y Teorema fundamental

13/10/2023

En este taller, aplicaremos el teorema fundamental del cálculo (primer y segundo teorema), de esta manera calcularemos primitivas de funciones sencillas. También, dada la derivada de una función y su valor en un punto, determinaremos la función. Por ejemplo, a partir de la aceleración de un objeto, conociendo su velocidad y posición iniciales, obtendremos su velocidad y su posición en cualquier instante de tiempo (velocidad y posición instantánea, respectivamente). Además se aplicarán propiedades de la integral definida e indefinida para resolver los problemas.

Objetivos:

1. Calcular primitivas de funciones básicas.
2. Encontrar la única función f que satisface las condiciones $f'(x) = g(x)$ y $f(x_0) = y_0$.

Ejercicios Propuestos

1. Calcule:

$$a) \int (3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3}) dx$$

Solución: Para determinar la integral primitiva, aplicamos la propiedad de linealidad de la integral indefinida y propiedades de potencias, obteniendo

$$\begin{aligned} \int (3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3}) dx &= 3 \int x^{-3} dx + \int \sqrt{x^5} dx - 2 \int x^{2/3} dx, \\ &= 3 \int x^{-3} dx + \int x^{5/2} dx - 2 \int x^{2/3} dx \end{aligned}$$

Finalmente, como para $c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right) = x^n \quad \Longleftrightarrow \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

se concluye,

$$\int (3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3}) dx = -\frac{3}{2} \cdot x^{-2} + \frac{2}{7} \cdot x^{7/2} - \frac{6}{5} \cdot x^{5/3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) $\int_{-3}^1 z(9 - z^2)^3 dz$

Solución: Notemos que,

$$\int z(9 - z^2)^3 dz = \int \frac{-2z}{-2} (9 - z^2)^3 dz = -\frac{1}{2} \int (9 - z^2)^3 (-2z) dz.$$

Ahora, para $c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{4} (9 - z^2)^4 + c \right] = (9 - z^2)^3 (-2z) \iff \int (9 - z^2)^3 (-2z) dz = \frac{1}{4} (9 - z^2)^4 + c.$$

De manera que,

$$\begin{aligned} \int z(9 - z^2)^3 dz &= -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{4} (9 - z^2)^4 + c \right] \\ &= -\frac{1}{8} (9 - z^2)^4 + k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Observación: k es una otra constante, la cual puede verse como $k = -\frac{1}{2}c$, sin embargo, para efectos de integración primitiva es simplemente otra constante.

c) $\int \frac{ax^2 + a^3 \cos(x)}{\sqrt{a}} dx$, donde $a > 0$ es una constante.

Solución: Dado que a es constante pues la integral es respecto de x , aplicando propiedad de linealidad se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{ax^2 + a^3 \cos(x)}{a^{\frac{1}{2}}} dx &= \int \frac{a(x^2 + a^2 \cos(x))}{a^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= a^{\frac{1}{2}} \int (x^2 + a^2 \cos(x)) dx \\ &= a^{\frac{1}{2}} \left[\int x^2 dx + \int a^2 \cos(x) dx \right] \\ &= a^{\frac{1}{2}} \left[\int x^2 dx + a^2 \int \cos(x) dx \right] \end{aligned}$$

Ahora, dado que para $c \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx} (\sin(x) + c) = \cos(x) \iff \int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

se tiene,

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}} \left[\int x^2 dx + a^2 \int \cos(x) dx \right] &= a^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x^3}{3} + a^2 \sin(x) + c \right] \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{\sqrt{a} x^3}{3} + a^2 \sqrt{a} \sin(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{ax^2 + a^3 \cos(x)}{a^{\frac{1}{2}}} dx = \frac{\sqrt{a}x^3}{3} + a^2\sqrt{a} \sin(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. Sea $x(t)$ la posición, en metros [m], de una partícula que se mueve sobre el eje X , con respecto al tiempo $t \geq 0$ medido en segundos [s]. Suponga que su aceleración $a(t) = x''(t)$ está dada por

$$a(t) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi t), \quad t \geq 0.$$

- a) Si la velocidad inicial de la partícula es $\frac{1}{4}$ [m/s], encuentre la velocidad instantánea $v(t) = x'(t)$.

Solución: Recordamos que variación de la velocidad de una partícula es la aceleración, de modo que, integrando la aceleración de la partícula podemos determinar la velocidad de la misma, es decir,

$$v(t) = \int a(t) dt$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int a(t) dt &= \int \frac{\pi}{2} \sin(\pi t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int \sin(\pi t) dt \end{aligned}$$

Además, para $c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi} + c \right) = \sin(\pi t) \quad \Longleftrightarrow \quad \int \sin(\pi t) dt = -\frac{\cos(\pi t)}{\pi} + c.$$

De manera que, la velocidad está dada por

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\pi}{2} \int \sin(\pi t) dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(\frac{\cos(\pi t)}{\pi} \right) + k, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ahora dado que $v(0) = \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\cos(0 \cdot \pi)}{\pi} \right) + k \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{\pi} \right) + k \\ &= -\frac{1}{2} + k. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + c \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{4} = c.$$

Concluyendo que

$$v(t) = -\frac{1}{2} (\cos(\pi t)) + \frac{3}{4}.$$

b) Si además la posición inicial de la partícula es de 5 [m], encuentre $x(t)$.

Solución: En virtud de la información antes mencionada tenemos que $x(0) = 5$, además,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t) dt \\ &= \int \left(-\frac{1}{2} (\cos(\pi t)) + \frac{3}{4} \right) dt \\ &= \int -\frac{1}{2} (\cos(\pi t)) dt + \int \frac{3}{4} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int (\cos(\pi t)) dt + \frac{3}{4} \int dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi} \right] + \frac{3}{4} t + c \end{aligned}$$

Luego, como $x(0) = 5$, determinamos la constante c

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}(\pi \cdot 0)}{\pi} \right] + \frac{3 \cdot 0}{4} + c &= 5 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la posición para cada instante esta dada por

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi} \text{sen}(\pi t) + \frac{3t}{4} + 5.$$

3. Para cada ítem, encuentre la función F que satisface:

$$a) \quad F'(x) = 3x\sqrt{x} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x) \quad \text{para } x > 0, \text{ y } F(0) = \frac{2}{3}.$$

Solución: Por lo expresado en el enunciado se quiere encontrar un función F tal que

$$F(x) = \int 3x\sqrt{x} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x) dx \quad \text{y} \quad F(0) = \frac{2}{3}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\int 3x\sqrt{x} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x) dx &= \int 3x\sqrt{x} dx - \int \frac{1}{(x+2)^2} dx + \int \cos(x) dx \\ &= 3 \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int \frac{-1}{(x+2)^2} dx + \int \cos(x) dx\end{aligned}$$

Luego, para $c \in \mathbb{R}$ al considerar la función $\varphi(x) = \frac{1}{x+2} + c$ se obtiene,

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}.$$

Por lo cual,

$$F(x) = \int 3x\sqrt{x} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x) dx = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{x+2} + \sin(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ahora, como se requiere que se satisfaga la condición $F(0) = \frac{2}{3}$, se tiene

$$\begin{aligned}F(0) &= \frac{6}{5} \cdot 0^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{0+2} + \sin(0) + c \\ &= \frac{1}{2} + c = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{1}{2} + c = \frac{2}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad c = \frac{1}{6}.$$

Concluyendo que

$$F(x) = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{x+2} + \sin(x) + \frac{1}{6}.$$

b) $F'(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}}$ para $x \in \mathbb{R}$, y $F(0) = 1$.

Solución: Por lo expresado en el enunciado se quiere encontrar un función F tal que

$$F(x) = \int \frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}} dx \quad \text{y} \quad F(0) = 1.$$

Si recordamos la regla de la cadena podemos notar que para $c \in \mathbb{R}$, al considerar la función,

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+9} + c$$

se obtiene,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^2+9}} \cdot (4x) \\ &= \frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}}.\end{aligned}$$

Por lo cual,

$$F(x) = \int \frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}} dx = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+9} + c.$$

Ahora, como se requiere que se satisfaga la condición $F(0) = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}F(0) &= \frac{3}{2}\sqrt{2(0)^2+9} + c \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{9} + c \\ &= \frac{9}{2} + c = 1\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{9}{2} + c = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad c = -\frac{7}{2}.$$

Concluyendo que

$$F(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+9} - \frac{7}{2}.$$

4. Se tiene que cierto tipo de árbol presenta una altura $h(t)$ después de t años de haber sido trasplantado, y su altura varía a una velocidad de

$$\sqrt{t} + \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t \geq 0,$$

metros por año. Si transcurridos dos años la altura que alcanzó el árbol fue de 5 metros, ¿qué altura tenía cuando fue trasplantado?

Solución: Consideremos

t : = el tiempo medido en años

$h(t)$: = la altura del árbol a los t años, medida en metros

Ahora, en virtud de la información facilitada en el enunciado, se tiene

$$\frac{dh}{dt} = \left(1 + \frac{1}{(t+1)^2}\right) \left[\frac{m}{\text{años}}\right] \quad \text{y} \quad h(2) = 5[m].$$

Para determinar la altura inicial, busquemos conocer $h(0)$, para ello, en primer lugar

$$h(t) = \int \left(1 + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = t - \frac{1}{t+1} + c.$$

Además,

$$h(2) = 2 - \frac{1}{3} + c = 5 \quad \implies \quad c = \frac{10}{3}.$$

De esta manera, el modelo de altura del árbol está dado por:

$$h(t) = t - \frac{1}{t+1} + \frac{10}{3}, \quad t \geq 0.$$

Por lo cual,

$$h(0) = 0 - 1 + \frac{10}{3} = \frac{7}{3} [\text{m}].$$

5. Sea $f : [-2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \begin{cases} \sin(2x) + x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 4\sqrt{x+1} - 2\sqrt[3]{x+8} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \end{cases}$

Determine $\int_{-2}^8 f(x) dx$

Solución: Para calcular la integral definida es necesario separar en intervalos convenientes, ya que la función f está confeccionada por tramos. Así,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^8 f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^8 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 (\sin(2x) + x^2) dx + \int_0^8 (4\sqrt{x+1} - 2\sqrt[3]{x+8}) dx. \end{aligned}$$

Utilizando la primera versión del teorema fundamental del cálculo (*regla de Barrow*), procedemos a calcular cada una de las integrales definidas

$$(i) \quad \int_{-2}^0 (\sin(2x) + x^2) dx = \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^0 = \frac{1}{6} (13 + 3 \cos(4)).$$

$$(ii) \quad \int_0^8 (4\sqrt{x+1} - 2\sqrt[3]{x+8}) dx = \left(4 \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} - 2 \cdot \frac{3}{4} (x+8)^{4/3} \right) \Big|_0^8 = \frac{280}{3} - 48\sqrt[3]{2}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-2}^8 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^8 f(x) dx = \frac{1}{6} (13 + 3 \cos(4)) + \frac{280}{3} - 48\sqrt[3]{2} = \frac{191}{2} + \frac{1}{2} \cos(4) - 48\sqrt[3]{2}.$$