



Ayudantía 8
Primitivas y Teorema fundamental
13/10/2023

En este taller, aplicaremos el teorema fundamental del cálculo (primer y segundo teorema), de esta manera calcularemos primitivas de funciones sencillas. También, dada la derivada de una función y su valor en un punto, determinaremos la función. Por ejemplo, a partir de la aceleración de un objeto, conociendo su velocidad y posición iniciales, obtendremos su velocidad y su posición en cualquier instante de tiempo (velocidad y posición instantánea, respectivamente). Además se aplicarán propiedades de la integral definida e indefinida para resolver los problemas.

Objetivos:

1. Calcular primitivas de funciones básicas.
2. Encontrar la única función f que satisface las condiciones $f'(x) = g(x)$ y $f(x_0) = y_0$.

Ejercicios Propuestos

1. Calcule:

a) $\int \left(3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3} \right) dx$

b) $\int_{-3}^1 z(9 - z^2)^3 dz$

c) $\int \frac{ax^2 + a^3 \cos(x)}{\sqrt{a}} dx$, donde $a > 0$ es una constante.

2. Sea $x(t)$ la posición, en metros [m], de una partícula que se mueve sobre el eje X , con respecto al tiempo $t \geq 0$ medido en segundos [s]. Suponga que su aceleración $a(t) = x''(t)$ está dada por

$$a(t) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi t), \quad t \geq 0.$$

- a) Si la velocidad inicial de la partícula es $\frac{1}{4}$ [m/s], encuentre la velocidad instantánea $v(t) = x'(t)$.
- b) Si además la posición inicial de la partícula es de 5 [m], encuentre $x(t)$.

3. Para cada ítem, encuentre la función F que satisface:

a) $F'(x) = 3x\sqrt{x} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x)$ para $x > 0$, y $F(0) = \frac{2}{3}$.

b) $F'(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}}$ para $x \in \mathbb{R}$, y $F(0) = 1$.

4. Se tiene que cierto tipo de árbol presenta una altura $h(t)$ después de t años de haber sido trasplantado, y su altura varía a una velocidad de

$$\sqrt{t} + \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t \geq 0,$$

metros por año. Si transcurridos dos años la altura que alcanzó el árbol fue de 5 metros, ¿qué altura tenía cuando fue trasplantado?

5. Sea $f : [-2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \begin{cases} \sin(2x) + x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 4\sqrt{x+1} - 2\sqrt[3]{x+8} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \end{cases}$

Determine $\int_{-2}^8 f(x) \, dx$