Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Control 3

26/09/2023

Instrucciones:

- **Disponen desde las 16:15 a las 16:45 para el desarrollo del control.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Debe responder SÓLO uno de los dos problemas que se presentan.**
- **Es individual.**
- **Nombre:**

Problemas:

1. Considera $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{2x^2 + 1}$.

   a) Determine en qué intervalos la función f es creciente y en qué intervalos es decreciente. **(3 puntos)**

   Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x^2+1) - x^2 \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 2x - 4x^3}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x}{(2x^2+1)^2}, \qquad x \in [-2, +\infty) \end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{1 punto}}$$

Luego,

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$$

Análisis de signo:

	$x \in [-2,0[$	$x=0$	$x \in]0,+\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Por lo tanto, f es decreciente en $[-2,0]$ y f es creciente en $[0,+\infty[$.

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

b) Analizar la existencia de asíntotas horizontales a la gráfica de $y=f(x)$. Indique los valores extremos de f, si es que existen. **(3 puntos)**

Solución: Dado el dominio de f, solo analizaremos asíntotas horizontal hacia el $+\infty$, en efecto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$

Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, mediante el álgebra de límites, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

Así,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Por lo tanto, la recta de ecuación $y=\dfrac{1}{2}$ es asíntota horizontal de f.

$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$

Además, en $x=0$ la función cambia de decreciente a creciente por lo que $f(0)=0$ es un mínimo de f y $f(-2)=\dfrac{4}{9}$ es máximo dado que f decrece.

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Como observación, en este control se evaluará solo extremo local, no obstante, notar que: $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [-2, +\infty[$. Por lo cual, f en $x = 0$ posee mínimo absoluto y es $f(0) = 0$.
Además, $y = \dfrac{1}{2} > f(-2) = \dfrac{4}{9}$, por lo que f no posee máximo absoluto.

2. Dada la siguiente función $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$, $x \in [-10, +\infty[-\{1\}$.

a) Demuestre que $f'(x) = -\dfrac{x+5}{(x-1)^3}$. **(2 puntos)**

Solución: En efecto, aplicando regla del cociente y regla de la cadena, tenemos:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{(x-1)^2 - (x+2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}}_{\boxed{\textbf{1.5 puntos}}} = \underbrace{\frac{-x-5}{(x-1)^3} = -\frac{x+5}{(x-1)^3}}_{\boxed{\textbf{0.5 puntos}}}, \quad x \in [-10, +\infty[-\{1\}$$

b) Determine en qué intervalos la función es cóncava hacia arriba y en qué intervalos es cóncava hacia abajo. Indique el o los puntos de inflexión de f, si es que existen. **(4 puntos)**

Solución: Para analizar la concavidad de una función debemos determinar $f''(x)$ y analizar sus signos, en efecto,

$$f''(x) = \underbrace{\frac{-(x-1)^3 + (x+5)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}}_{\boxed{\textbf{1 punto}}} = \underbrace{\frac{-(x-1) + 3x + 15}{(x-1)^4}}_{\boxed{\textbf{0.5 puntos}}} = \frac{2x+16}{(x-1)^4}, \quad x \in [10, +\infty[\setminus\{1\}.$$

Así,

$$f''(x) = 0 \iff x = -8$$

Análisis de signo:

	$x \in [-10, -8[$	$x = -8$	$x \in]-8, 1[$	$x = 1$	$x \in]1, +\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cup$

1 punto

Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba en $[-8, 1[$ y en $]1, +\infty[$

0.5 puntos

f es cóncava hacia abajo en $[-10, -8]$

0.5 puntos

Además, la gráfica cambia de concavidad en $x = -8$. Por lo tanto, $(-8, f(-8)) = \left(-8, , \dfrac{-2}{27}\right)$ es un punto de inflexión.

0.5 puntos