Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Pauta Control 2

29/08/2023

Instrucciones:

- **Disponen desde las 16:15 a las 16:45 para el desarrollo del control.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Debe responder SÓLO uno de los dos problemas que se presentan.**
- **Es individual.**
- **Nombre:**

Problemas:

1. Demuestre que la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x^2+3x+1} \cdot \cos(m\,x^2)$ en $x = 0$, donde m es una constante real, es perpendicular a la recta de ecuación $3y + 2x = 12$.

   Nota: Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendiente resulta -1.

   Solución: En primer lugar, debemos calcular $f'(0) = m_1$ que es la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 0$.

   $$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

   Además,

   $$f'(x) = (\sqrt{x^2+3x+1})' \cdot \cos(mx^2) + \sqrt{x^2+3x+1} \cdot (\cos(mx^2))'$$

   $$\boxed{\textbf{1.5 puntos}}$$

   $$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+1}}(2x+3)\cos(mx^2) + \sqrt{x^2+3x+1} \cdot (-\operatorname{sen}(mx^2)) \cdot 2mx$$

   $$\boxed{\textbf{1.5 puntos}}$$

   Luego,

   $$f'(0) = \frac{1}{2} \cdot 3 + 0 = \frac{3}{2} = m_1$$

   $$\boxed{\textbf{1 punto}}$$

Además, la recta $3y + 2x = 12$ tiene pendiente $m_2 = -\dfrac{2}{3}$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

y

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

Por lo tanto, la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$ es perpendicular a la recta $3y+2x = 12$.

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

2. La ecuación que modela la posición $x(t)$ de una masa m con respecto al punto de equilibrio en el tiempo t es

$$x(t) = 2\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right),$$

donde k es la constante de elasticidad del resorte y donde t se mide en segundos.

Demuestre que la función x satisface la ecuación

$$x''(t) + \frac{k}{2}\,x(t) - \sqrt{2k}\cdot \operatorname{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = x'(t), \tag{1}$$

donde $x''(t)$ denota la segunda derivada de x con respecto a t.

Solución: En primer lugar, calculamos las derivadas $x'(t)$ y $x''(t)$ y reemplazaremos en (1) para demostrar que se cumple la igualdad. Por un lado,

$$x'(t) = -2\operatorname{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right)\cdot\sqrt{\frac{k}{2}}$$

$$\boxed{\textbf{2 puntos}}$$

Además,

$$\begin{aligned} x''(t) &= -2\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right)\cdot\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\sqrt{\frac{k}{2}} \\ &= -k\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{2 puntos}}$$

Así, reemplazado en la ecuación (1), se tiene

$$\begin{aligned}
x''(t)+\frac{k}{2}\,x(t)-\sqrt{2k}\cdot\operatorname{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right) &= -k\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right)+\frac{k}{2}\cdot 2\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right)-\sqrt{2k}\,\operatorname{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right)\\
&= -\sqrt{2}\cdot\sqrt{k}\,\operatorname{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right)\\
&= -\sqrt{\frac{k}{2}}\,\operatorname{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{2}}\right)\\
&= x'(t)
\end{aligned}$$

1.5 puntos

Por lo tanto, queda demostrado que se cumple la ecuación (1) .

0.5 puntos