Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Pauta Control 1

22/08/2023

Instrucciones:

- **Disponen desde las 16:15 a las 16:45 para el desarrollo del control.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Debe responder SÓLO uno de los dos problemas que se presentan.**
- **Es individual.**
- **Nombre:**

Problemas Propuestos:

1. Sea $f\colon\ ]0,2[\to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-x}{x^2-1} - \dfrac{11}{4} & \text{si } 0 < x < 1, \\ -3 & \text{si } x = 1, \\ \dfrac{x^3+x^2-2x}{x^3-3x^2+2x} & \text{si } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en $x = 1$.

Solución: Sabemos que f es continua en $x = 1$ si

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1),$$

0.5 puntos

Tenemos que $f(1) = -3$.

0.5 puntos

Nos falta verificar que el límite exista, en efecto por un lado, el límite lateral izquierdo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-x}{x^2-1} - \frac{11}{4} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x-x^2}{(x^2-1)(\sqrt{x}+x)} - \frac{11}{4} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(-1+x)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+x)} - \frac{11}{4} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{(x+1)(\sqrt{x}+x)} - \frac{11}{4}\end{aligned}$$

1 punto

Ahora, notemos que como

$$\lim_{x\to 1^-} (x+1)(\sqrt{x}+x) = 4 \neq 0\,,$$

0.5 puntos

se tiene

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{(x+1)(\sqrt{x}+x)} = -\frac{1}{4}$$

0.5 puntos

Así, en virtud del álgebra de límites , se concluye

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-1}{4} - \frac{11}{4} = -3$$

0.2 puntos

Por otro lado, calculamos el límite por la derecha, en efecto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3+x^2-2x}{x^3-3x^2+2x} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x^2+x-2)}{x(x^2-3x+2)} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)(x+2)}{x(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-2}\,.\end{aligned}$$

0.5 puntos

0.5 puntos

Luego, como

$$\lim_{x\to 1^+} x-2 = -1 \neq 0\,,$$

0.5 puntos

se concluye que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{3}{-1} = -3$$

0.5 puntos

Por lo tanto, el límite existe y está dado por

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = -3$$

0.4 puntos

Finalmente, como $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ se concluye que f es continua en $x = 2$.

0.4 puntos

2. Calcule $g'(-1)$ para la función

$$g(x) = \frac{\left(x^5 - \frac{2}{x}\right)\cdot(x^7-1)}{-3x^{-4} - x + 1}$$

Solución: Para calcular $g'(1)$, primero debemos determinar $g'(x)$ y luego evaluar $g'(x)$ en $x = -1$.

0.5 puntos

Para facilitar el proceso, llamaremos

$$w(x) = \left(x^5 - \frac{2}{x}\right)\cdot(x^7-1) \qquad \text{y} \qquad h(x) = -3x^{-4} - x + 1\,,$$

de tal manera que $g(x) = \dfrac{w(x)}{h(x)}$ y su derivada está dada por

$$g'(x) = \frac{w'(x)\cdot h(x) - w(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

2 puntos

Luego, calculamos $w'(x)$ y $h'(x)$, en efecto

$$\begin{aligned} w'(x) &= \left(x^5 - \frac{2}{x}\right)'\cdot(x^7-1) + \left(x^5 - \frac{2}{x}\right)\cdot(x^7-1)' \\ &= \left(5x^4 + \frac{2}{x^2}\right)\cdot(x^7-1) + \left(x^5 - \frac{2}{x}\right)\cdot(7x^6) \end{aligned}$$

1 punto

y

$$h'(x) = 12x^{-5} - 1$$

1 punto

Además,

$$g'(-1) = \frac{w'(-1) \cdot h(-1) - w(-1) \cdot h'(-1)}{h^2(-1)}$$

donde, $w(-1) = -2$, $w'(-1) = -7$, $h(-1) = -1$ y $h'(-1) = -13$.

0.5 puntos

Así,

$$g'(-1) = \frac{(-7) \cdot (-1) - (-2) \cdot (-13)}{(-1)^2} = -19\,.$$

Por lo tanto, $g'(-1) = -19$.

1 punto