Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Ayudantía 7
Sumatorias e integrales definidas
29/09/2023

En este taller, calcularemos la suma de n términos consecutivos de una sucesión y aplicaremos las propiedades del símbolo sumatoria y sumas notables, como la suma telescópica, suma de números naturales, de cuadrados y cubos y la suma geométrica.

Posteriormente, calcularemos la suma de Riemann de una función cuadrática en un intervalo dado con el objetivo de determinar el valor de la respectiva integral definida mediante el límite de dicha suma superior.

Objetivos:

- Aplica propiedades del símbolo sumatoria y sumas notables para calcular la suma de los términos de una sucesión.
- Construye la suma de Riemann de una función monótona en un intervalo.
- Calcula la integral definida de una función cuadrática mediante el límite de su suma superior.
- Calcula el término general de una sucesión definida recursivamente

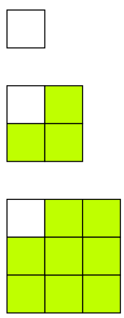
Ejercicios Propuestos

1. Considere el siguiente experimento:

Etapa 1. Comience con un cuadrado cuyo lado mida 1 unidad [u], por lo cual su área mide 1 [u^2].

Etapa 2. A continuación, al primer cuadrado agréguele tres cuadrados iguales al primero, tal como se presenta en la figura 2, formando así un nuevo cuadrado cuyo lado mide 2 [u] y su área mide 4 [u^2].

Etapa 3. De igual manera, al cuadrado formado en la etapa anterior agréguele cinco cuadrados iguales al primero, tal como se presenta en la figura 3, formando así un nuevo cuadrado cuyo lado mide 3 [u] y su área mide 9 [u^2].



Área del cuadrado formado

1 $A_1 = 1$

2 $A_2 = 1 + 3 = 4$

3 $A_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

Responda lo siguiente.

a) En la siguiente etapa, ¿cuántos cuadrados iguales al primero se deberían agregar para formar un cuadrado cuyo lado mida 4 [u]?

Solución: A partir de la información anteriormente proporcionada, el cuadrado de lado 4 [u] está compuesto de 16 cuadrados iguales al primero, además, dado que en la tercera etapa disponemos de 9 cuadrados, deberíamos agregar 7 cuadrados adicionales.

b) Establezca una regularidad para determinar cuántos cuadrados iguales al primero debería agregar en la etapa i-ésima para así formar un cuadrado cuyo lado mida i [u].

Solución: Para $n \in \mathbb{N}$, en la primera etapa la cantidad de cuadrados iguales al primero que deberíamos agregar para generar un cuadrado de lado 1 es cero y para cada valor natural mayor que 1 la cantidad de cuadrados que deberíamos agregar es

$$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1\,.$$

De manera que la la sucesión pedida está dada por

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 2n-1 & \text{si } n > 1 \end{cases}.$$

c) La suma de las áreas de todos los cuadrados que se han agregado hasta la etapa i-ésima (partiendo de la Etapa 1), ¿se relaciona con el área del cuadrado total formado en dicha etapa? Utilice el símbolo Σ para abreviar la suma y deduzca una expresión que represente la suma de los primeros n números naturales.

Solución: En primer lugar, dado que todos los cuadrados son idénticos al inicial y están dispuestos de tal forma que ninguno se solapa con otro (*disjuntos*), podemos concluir que la suma de todos los cuadrados adicionales y el inicial es exactamente el área del cuadrado total en cada etapa. Con notación de sumatorias:

$$1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = n^2$$

Luego, aplicando propiedades del símbolo de sumatoria se tiene

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = n^2 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 1 + 0 + \sum_{i=2}^{n}(2i-1) = n^2 \\ &\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = n^2 \end{aligned}$$

Ahora, si sumamos n veces el valor 1 resulta exactamente n, de manera que

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n\,.$$

Por lo tanto,

$$2\sum_{i=1}^{n} i - n = n^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

2. Utilice la notación Σ de sumatoria y sus propiedades para calcular una fórmula de las siguientes expresiones.

   a) $1 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$.

   Solución: En primer lugar, escribimos la suma anterior con notación de sumatorias

$$1 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} \Big(8k^3 - 12k^2 + 6k - 1\Big)\,.$$

   Luego, aplicando propiedades de linealidad del signo de sumatorias, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(8k^3 - 12k^2 + 6k - 1\Big) = 8\sum_{k=1}^{n} k^3 - 12\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\,.$$

   Ahora, aplicando fórmulas de sumatorias notables, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 &= 8\sum_{k=1}^{n} k^3 - 12\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 8\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 12\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= 2\Big(n(n+1)\Big)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n \\
&= n\Big[(n+1)(2n^2 - 2n + 1) - 1\Big) \\
&= n(2n^3 - n) \\
&= 2n^4 - n^2\,.
\end{aligned}$$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-2)^n \left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2}$.

   Solución: Comenzaremos manipulando algebraicamente la expresión anterior y extraemos factores comunes, en efecto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-2)^n \left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2} &= \sum_{k=1}^{n} (-2)^n \left(-\frac{2}{3}\right)^{k} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{2} \\
&= \frac{(-2)^{n+2}}{9} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^{k}\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicamos la suma geométrica con $r = -\dfrac{2}{3} \neq 1$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^k &= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{3}}\\ &= -\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-2)^n\left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2} &= \frac{(-2)^{n+2}}{9}\cdot-\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]\\ &= \frac{(-2)^{n+3}}{45}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right].\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i}{i^2+2i+1}\right)-\left(\frac{i-1}{i^2}\right).$

Solución: En primer lugar, notemos que al considerar la sucesión $a_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}$, la suma que queremos calcular se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i}{i^2+2i+1}\right)-\left(\frac{i-1}{i^2}\right) = \sum_{i=1}^{k}\Big(a_i - a_{i-1}\Big)$$

Luego, aplicamos propiedad telescópica se concluye que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i}{i^2+2i+1}\right)-\left(\frac{i-1}{i^2}\right) &= \sum_{i=1}^{k}\Big(a_i - a_{i-1}\Big)\\ &= a_k - a_0\\ &= \frac{k}{(k+1)^2}-\frac{0}{(0+1)^2}\\ &= \frac{k}{(k+1)^2}.\end{aligned}$$

3. Considere la función $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + x$ y el intervalo $I = [1, 7]$.

a) Calcule la suma de Riemann, $S(f, P_n)$, en el intervalo I subdividiendo I en n subintervalos I_i de igual longitud, Δx. Para ello, recuerde que si $I = [a, b]$ entonces

$$\Delta x = \frac{b-a}{n};\quad I_i = [a+(i-1)\Delta x, a+i\Delta x], i = 1, 2, \ldots, n.$$

Además, considere

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Solución: Para determinar la suma superior de f con la partición regular I_n del intervalo I, debemos primero determinar el largo de los sub-intervalos. Luego, tenemos que

$$\Delta x = \frac{7-1}{n} = \frac{6}{n}, \ \forall\, i = 1, ..., n\,.$$

Para determinar los elementos de la partición, notemos que $x_0 = 1$ y $x_n = 7$. Como es una partición regular, los elementos están en progresión aritmética, es decir,

$$x_i = x_0 + \frac{6}{n}\cdot i = 1 + \frac{6}{n}\cdot i\,.$$

Ahora bien, notemos que la función es creciente en el intervalo $[1, 7]$, en efecto, para todo $x \in I$, se tiene

$$\begin{aligned}
1 \le x \le 7 \quad &\iff \quad 2 \le x \le 14\\
&\iff \quad 3 \le 2x + 1 \le 15\\
&\iff \quad 3 \le f'(x) \le 15
\end{aligned}$$

Es decir, en particular para todo $x \in I : f'(x) > 0$. Luego, la suma superior de Riemann para la función f en el intervalo I, está dada por:

$$\begin{aligned}
S(f, I_n) &= \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(1 + i\Delta x)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n} f\left(1 + \frac{6i}{n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n}\left[\left(1 + \frac{6i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{6i}{n}\right)\right]\,.
\end{aligned}$$

Desarrollando, tenemos que

$$\begin{aligned}
S(f, I_n) &= \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1 + \frac{6i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{6i}{n}\right)\right]\,.\\
&= \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 + \frac{12i}{n} + \frac{36i^2}{n^2} + 1 + \frac{6i}{n}\right]\\
&= \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[2 + \frac{18i}{n} + \frac{36i^2}{n^2}\right]\\
&= \frac{6}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{18i}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{36i^2}{n^2}\right]\\
&= \frac{6}{n}\left[2n + \frac{18}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{36}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\
&= \frac{6}{n}\left[2n + 9(n+1) + \frac{6}{n}(2n^2 + 3n + 1)\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S(f, I_n) = 138 + \frac{162}{n} + \frac{36}{n^2}.$$

b) Calcule $\lim_{n\to+\infty} S(f, P_n)$ y proponga un resultado para $\int_1^7 (x^2+x)\,\mathrm{d}x$.

Solución: Para calcular la integral, por medio de la suma superior anterior, determinamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} S(f, I_n) = \lim_{n\to\infty} 138 + \frac{162}{n} + \frac{36}{n^2} = 138$$

Por lo tanto,

$$\int_1^7 x^2 - x\,dx = 138\,.$$