Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Ayudantía 7
Sumatorias e integrales definidas

29/09/2023

En este taller, calcularemos la suma de n términos consecutivos de una sucesión y aplicaremos las propiedades del símbolo sumatoria y sumas notables, como la suma telescópica, suma de números naturales, de cuadrados y cubos y la suma geométrica.

Posteriormente, calcularemos la suma de Riemann de una función cuadrática en un intervalo dado con el objetivo de determinar el valor de la respectiva integral definida mediante el límite de dicha suma superior.

Objetivos:

- Aplica propiedades del símbolo sumatoria y sumas notables para calcular la suma de los términos de una sucesión.
- Construye la suma de Riemann de una función monótona en un intervalo.
- Calcula la integral definida de una función cuadrática mediante el límite de su suma superior.
- Calcula el término general de una sucesión definida recursivamente

Ejercicios Propuestos

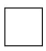
1. Considere el siguiente experimento:

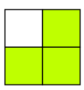
   Etapa 1. Comience con un cuadrado cuyo lado mida 1 unidad [u], por lo cual su área mide 1 [u^2].

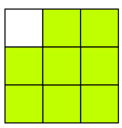
   Etapa 2. A continuación, al primer cuadrado agréguele tres cuadrados iguales al primero, tal como se presenta en la figura 2, formando así un nuevo cuadrado cuyo lado mide 2 [u] y su área mide 4 [u^2].

   Etapa 3. De igual manera, al cuadrado formado en la etapa anterior agréguele cinco cuadrados iguales al primero, tal como se presenta en la figura 3, formando así un nuevo cuadrado cuyo lado mide 3 [u] y su área mide 9 [u^2].

Área del cuadrado formado

1  $A_1 = 1$

2  $A_2 = 1 + 3 = 4$

3  $A_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

Responda lo siguiente.

a) En la siguiente etapa, ¿cuántos cuadrados iguales al primero se deberían agregar para formar un cuadrado cuyo lado mida $4\,[\mathrm{u}]$?

b) Establezca una regularidad para determinar cuántos cuadrados iguales al primero debería agregar en la etapa i-ésima para así formar un cuadrado cuyo lado mida $i\,[\mathrm{u}]$.

c) La suma de las áreas de todos los cuadrados que se han agregado hasta la etapa i-ésima (partiendo de la Etapa 1), ¿se relaciona con el área del cuadrado total formado en dicha etapa? Utilice el símbolo Σ para abreviar la suma y deduzca una expresión que represente la suma de los primeros n números naturales.

2. Utilice la notación Σ de sumatoria y sus propiedades para calcular una fórmula de las siguientes expresiones.

   a) $1 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$.

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-2)^n \left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2}$.

   c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{i}{i^2+2i+1}\right) - \left(\frac{i-1}{i^2}\right)$.

3. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + x$ y el intervalo $I = [1, 7]$.

   a) Calcule la suma de Riemann, $S(f, P_n)$, en el intervalo I subdividiendo I en n subintervalos I_i de igual longitud, Δx. Para ello, recuerde que si $I = [a, b]$ entonces

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}; \quad I_i = [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x], i = 1, 2, \ldots, n.$$

   Además, considere

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(a + i\Delta x) \cdot \Delta x.$$

   b) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S(f, P_n)$ y proponga un resultado para $\displaystyle\int_1^7 (x^2 + x)\,\mathrm{d}x$.

Ejercicios adicionales

1. En el Problema 2, calcule la suma de Riemann

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(a + (i-1)\Delta x) \cdot \Delta x$$

y muestre que

$$\lim_{n\to+\infty} S(f, P_n) = \lim_{n\to+\infty} s(f, P_n).$$

2. Sea a_n la sucesión definida recursivamente por:

$$a_1 = 2; \quad a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Escriba algunos términos iniciales en función de a_1, evitando resultados numéricos. ¿Observa alguna regularidad?

b) Determine el término general de la sucesión.

c) Calcule $\sum_{n=1}^{k} a_n$.