



Ayudantía 6

Optimización y gráfico de funciones

22/09/2023

En este taller, abordaremos un conjunto de conceptos vistos hasta el momento, tales como, reglas de derivación, límites para analizar la existencia de asíntotas verticales y horizontales, criterios de la primera y de la segunda derivada para estudiar la monotonía y concavidad de una función, entre otros. Todo este proceso tiene como finalidad esbozar el gráfico de una función dada. Además, aplicaremos el cálculo diferencial para resolver problemas contextualizados cuyo objetivo es la optimización de una función.

Objetivos:

- Realiza análisis de curva para esbozar el gráfico de una función.
- Resuelve problemas de optimización aplicando el cálculo diferencial.
- Modela y optimiza una función de acuerdo a un contexto.

Ejercicios Propuestos

1. Considere la función $f: \mathbb{R} \setminus \{2, -2\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$.

Con el objetivo de esbozar el gráfico de la función f , siga los siguientes pasos:

- i) Encuentre las intersecciones con los ejes.

Solución: Sabemos que la intersección con el eje Y está dado por el punto $(0, f(0))$, es decir, particularmente

$$f(0) = \frac{0^2 + 1}{0^2 - 4} = -\frac{1}{4}$$

por lo cual la función corta al eje Y en el punto $(0, -\frac{1}{4})$. Por otro lado, sabemos que la intersección con el eje X son los puntos de la forma $(x, 0)$, entonces buscamos los x que satisfacen

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = 0.$$

Luego, notemos que esta fracción es igual a cero si su numerador lo es, pero $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Por lo tanto no existe el punto buscado. Es decir, no hay intersección con el eje X .

ii) Determine asíntotas verticales y horizontales, si es que existen.

Solución: Primero sería conveniente manipular algebraicamente la expresión, para tener una mejor óptica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x - 2)} = (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{(x + 2)(x - 2)}$$

Ahora para encontrar las asíntotas verticales observaremos los límites laterales en los valores $\{-2, 2\}$, ya que estos valores no pertenecen al dominio de la función, además examinando el signo de cada factor del denominador de la función podemos notar que para valores cercanos por la izquierda al -2 la función toma valores positivos y para valores cercanos por la derecha al mismo valor -2 la función toma valores negativos.

	$x \in (-\infty, -2)$	$x \in (-2, 2)$	$x \in (2, \infty)$
$x + 2$	—	+	+
$x - 2$	—	—	+

Luego, como $\lim_{x \rightarrow -2} (x - 2)(x + 2) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 1 = 5$, considerando lo anterior, podemos concluir que,

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x - 2)} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x - 2)} = -\infty.$$

Por otro lado, argumentando de manera análoga, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x - 2)} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x - 2)} = \infty$$

Así podemos concluir que las rectas de ecuación $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Para las asíntotas horizontales analizaremos los límites en el infinito, en efecto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x - 2)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 1) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)}{(x^2 - 4) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x - 2)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)}{(x^2 - 4) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \\&= 1\end{aligned}$$

De tal forma que la recta cuya ecuación está dada por $y = 1$ es una asíntota horizontal.

iii) Máximos y mínimos locales de f

Solución: Como la función f es diferenciable en su dominio, buscaremos los puntos tales que $f'(x) = 0$, entonces, para ello calculamos la función derivada

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}\right)' \\&= \frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 4) - (x^2 + 1)(x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2} \\&= \frac{(2x)(x^2 - 4) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 4)^2} \\&= \frac{-2x(x^2 + 1 - (x^2 - 4))}{(x^2 - 4)^2} \\&= \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2}\end{aligned}$$

Entonces,

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

Entonces, los puntos críticos son los valores $x \in \{-2, 0, 2\}$. Luego, para determinar estos puntos son máximo o mínimo aplicaremos el criterio de la segunda derivada, para ello notemos

que la función f' es diferenciable y su derivada está dada por

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{-10x}{(x^2-4)^2} \right)' = \frac{(-10x)'((x^2-4)^2) + 10x((x^2-4)^2)'}{(x^2-4)^4} \\
 &= \frac{-10(x^2-4)^2 + 10x(2(x^2-4)(2x))}{(x^2-4)^4} = \frac{-10(x^2-4)^2 + 10x(4x(x^2-4))}{(x^2-4)^4} \\
 &= \frac{-10(x^2-4)^2 + 40x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)(-10(x^2-4) + 40x^2)}{(x^2-4)^4} \\
 &= \frac{(x^2-4)(-10x^2 + 40 + 40x^2)}{(x^2-4)^4} \\
 &= \frac{(x^2-4)(30x^2 + 40)}{(x^2-4)^4}, \quad x \neq -2, x \neq 2 \\
 &= \frac{(30x^2 + 40)}{(x^2-4)^3}
 \end{aligned}$$

Luego, estudiamos la naturaleza de los valores extremos, para ello reemplazamos el punto crítico $x = 0$ en $f''(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 f''(0) &= \frac{(30(0)^2 + 40)}{((0)^2 - 4)^3} \\
 &= \frac{(40)}{(-4)^3} \\
 &= -\frac{40}{64} < 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, en virtud del criterio de la segunda derivada podemos afirmar que en $x = 0$ hay un máximo local de f . En el caso de $x \in \{-2, 2\}$ debido a la existencia de asíntotas, las imágenes son no acotadas de manera que no hay ni mínimo ni máximo. luego el único valor máximo local de f es $f(0) = -\frac{1}{4}$.

iv) Intervalos donde la función es creciente y donde es decreciente.

Solución: Para esto debemos analizar los signos de $f'(x)$ en su dominio

	$x \in (-\infty, -2)$	$x \in (-2, 0)$	$x \in (0, 2)$	$x \in (2, \infty)$
$(x^2 - 4)^2$	+	+	+	+
$-10x$	+	+	-	-
$f'(x)$	+	+	-	-

Así podemos concluir que f es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0]$ y es decreciente en los intervalos $[0, 2)$ y $(2, \infty)$.

v) Intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo, y puntos de inflexión.

Solución: Pensemos primero en encontrar los puntos de inflexión

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(30x^2 + 40)}{(x^2 - 4)^3} = 0$$

notando que $30x^2 + 40 > 0$ ya para todo $x \in \mathbb{R}$, de esta forma la función f no tiene puntos inflexión, además, examinando los signos de la regla de asignación de f'' , se tiene

	$x \in (-\infty, -2)$	$x \in (-2, 2)$	$x \in (2, \infty)$
$x + 2$	—	+	+
$x - 2$	—	—	+
$30x^2 + 40$	+	+	+
$f''(x)$	+	—	+

Determinando que f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, -2)$ y en el intervalo $(2, \infty)$ además de ser cóncava hacia abajo en el intervalo $(-2, 2)$.

Esboce el gráfico tomando en consideración cada uno de los cálculos expuestos en los pasos anteriores.

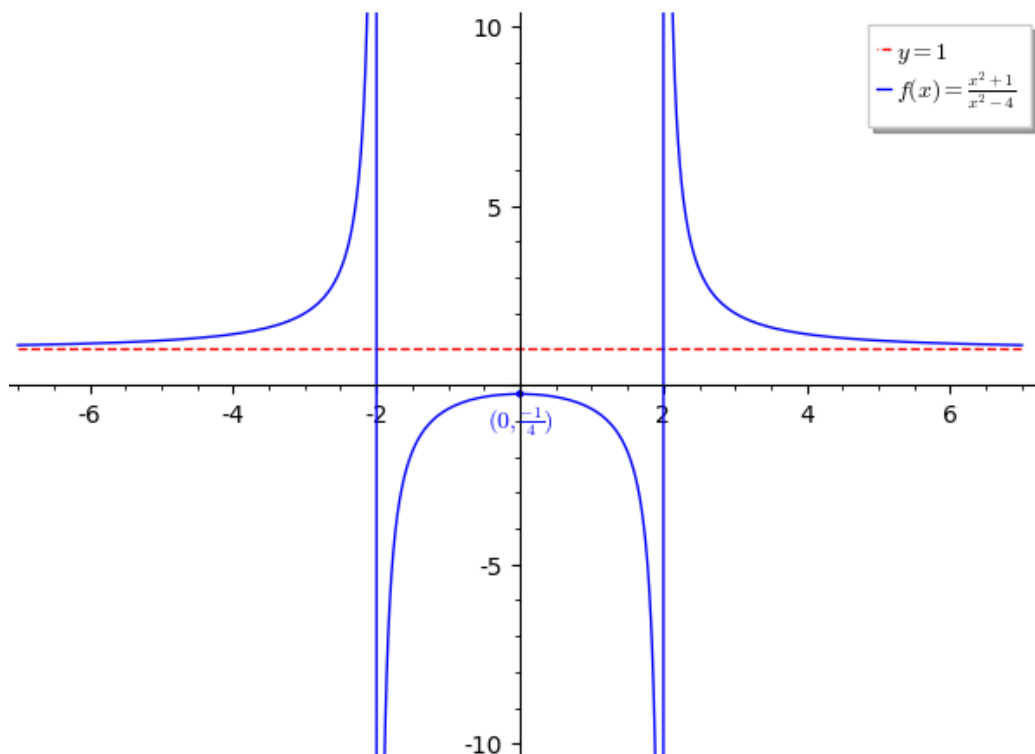


Figura 1: Gráfica de la función f .

2. La energía (por unidad de tiempo) gastada por cierta especie de perico en un vuelo horizontal, está dada por la expresión

$$E(v) = \frac{1}{v}(k(v-35)^2 + c),$$

donde v es la velocidad de vuelo del ave medida en [km/h], y donde k, c son constantes positivas. ¿Qué velocidad de vuelo del perico minimiza su gasto energético?

Solución: En primer lugar, Notamos que como el dominio de $E(v)$ no es un intervalo cerrado no está garantizada la existencia de máximos y mínimos absolutos. Para analizar la situación, usaremos el criterio de la segunda derivada. Notemos que para $v > 0$ la función E es diferenciable y su derivada está dada por

$$\begin{aligned}\frac{dE(v)}{dv} &= -\frac{1}{v^2}(k(v-35)^2 + c) + \frac{1}{v}(2k(v-35)) \\ &= (v-35) \left[\frac{2k}{v} - \frac{k}{v^2}(v-35) \right] - \frac{c}{v^2} \\ &= (v-35) \cdot \frac{k(v+35)}{v^2} - \frac{c}{v^2} \\ &= \frac{k(v-35)(v+35) - c}{v^2} \\ &= \frac{1}{v^2}(k(v^2 - 35^2) - c).\end{aligned}$$

Luego, encontramos puntos críticos

$$E'(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{k(v^2 - 35^2) - c}{v^2} = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned}k(v^2 - 35^2) - c &= 0 \\ v^2 - 35^2 &= \frac{c}{k} \\ v^2 &= 1225 + \frac{c}{k} \\ v &= \pm \sqrt{1225 + \frac{c}{k}}.\end{aligned}$$

Dado que el dominio de $E(v)$ son los $v > 0$, de manera que $v_0 = \sqrt{1225 + \frac{c}{k}}$ es el único candidato a valor extremo de la función (punto crítico). Estudiaremos su naturaleza, para ello notamos que la función E' es diferenciables para $v > 0$ y su función derivada está dada por

$$\begin{aligned}E''(v) &= -\frac{2}{v^3}(k(v^2 - 35^2) - c) + \frac{1}{v^2} \cdot 2kv \\ &= \frac{1}{v^3}(2kv^2 - 2kv^2 + 2 \cdot 35^2 + c) \\ &= \frac{2 \cdot 35^2 + c}{v^3}.\end{aligned}$$

Evaluando el punto crítico encontrado se tiene

$$E''(v_0) = E \left(\sqrt{1225 + \frac{c}{k}} \right) = \frac{2 \cdot 35^2 + c}{\left(\sqrt{1225 + \frac{c}{k}} \right)^3} > 0$$

pues tanto c como k son constantes positivas.

Finalmente, por el criterio de la segunda derivada tenemos que $E'(v_0) = 0$ y $E''(v_0) > 0$ de manera que $E(v_0)$ es un valor mínimo (local *a priori*) de la función y está dado por

$$E(v_0) = E \left(\sqrt{1225 + \frac{c}{k}} \right) = \frac{1}{\left(\sqrt{1225 + \frac{c}{k}} \right)} \left(k \left(\sqrt{1225 + \frac{c}{k}} - 35 \right)^2 + c \right) [\text{J}].$$

Cabe mencionar que es el único extremo local en el dominio y este es un mínimo local entonces es un mínimo absoluto, en efecto $E(v) \rightarrow +\infty$ cuando $v \rightarrow 0^+$ y $E(v) \rightarrow +\infty$ cuando $v \rightarrow +\infty$.

Por lo tanto, la velocidad que minimiza el gasto energético es

$$v_0 = \sqrt{1225 + \frac{c}{k}} \quad \left[\frac{\text{Km}}{\text{h}} \right].$$

Observación: Una alternativa al criterio de la segunda derivada para discriminar valores extremos de la función es, a partir de los intervalos de monotonía de la función estudiar su variación en los puntos extremos.

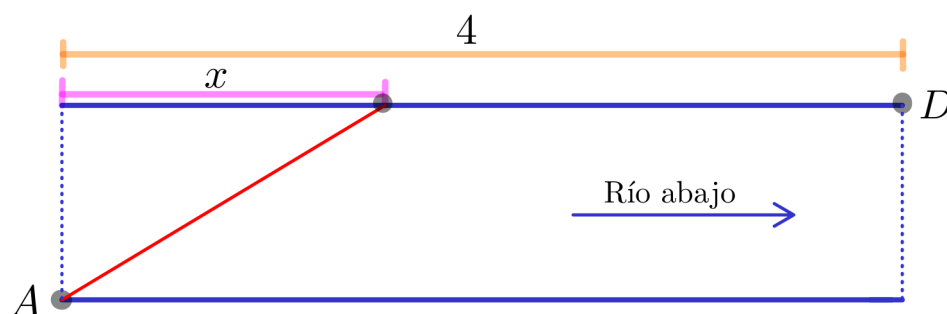
En particular, esta estrategia nos permitiría concluir lo anterior considerando:

Dado que el denominador de $E'(v)$ es $v^2 > 0$, entonces el signo lo determina el numerador, además, el numerador es una cuadrática cóncava hacia arriba (pues $k > 0$). Luego, $E'(v)$ es positiva para $v > v_0$ y negativa para $0 < v < v_0$. Por lo tanto en v_0 hay un mínimo local y además $E(v)$ es decreciente para $0 < v < v_0$ y creciente para $v > v_0$. Esto nos permite concluir que $E(v_0)$ es el mínimo absoluto.

3. Harold ha decidido viajar a su tierra natal (Valdivia) para disfrutar de sus vacaciones de fiestas patrias. En este lugar aprovechará de hacer un poco de deporte al aire libre. su objetivo es cruzar un río que tiene un ancho de 1 [km] a fin de alcanzar un punto D a 4 [km] río abajo, como se muestra en la figura adjunta. Él puede nadar a 4 [km/hora] y correr a 10 [km/hora]. Suponiendo que Harold comenzará nadando hacia un punto a x [km] río abajo del punto A de donde parte, determine:

- a) El tiempo T , en función de x , que Harold se demorará en llegar de A a D .
- b) Los puntos críticos de T .

- c) Los intervalos donde T es creciente y los intervalos donde es decreciente.
- d) El valor de x para el cual Harold llegará más rápido a su destino, y determine el tiempo que demorará.



- a) El tiempo T , en función de x , que Harold se demorará en llegar de A a D .

Solución: Notemos que un objeto que se mueve a rapidez constante, ésta se modela mediante la variación de la distancia en el tiempo, es decir,

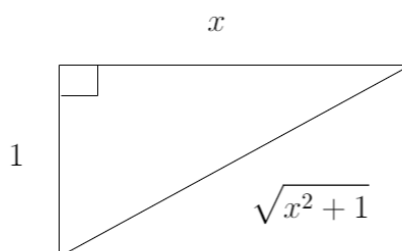
$$\text{Rapidez} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo total}}$$

Así, el tiempo total T_t en recorrer desde el punto A hasta el punto D , está dado por

$$T_t = t_0 + t_1,$$

donde, t_0 es el tiempo empleado en cruzar el río y t_1 es el tiempo que demora en hacer su recorrido corriendo.

Ahora, notemos que en virtud de lo señalado en las hipótesis del problema podemos visualizar la siguiente situación



En ella podemos notar que la distancia que recorre nadando Harold corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo, es decir recorre $\sqrt{x^2 + 1}$ [Km] y por la relación anterior para la rapidez constate, se tiene

$$t_0 = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{4},$$

Pues la rapidez es de $4 \left[\frac{\text{Km}}{\text{H}} \right]$, Además, para determinar t_1 sabemos que la distancia recorrida es $4 - x$ y la rapidez es de $10 \left[\frac{\text{Km}}{\text{H}} \right]$, entonces

$$t_1 = \frac{4 - x}{10},$$

Por lo tanto, T_t está dado por

$$\begin{aligned} T_t &= t_0 + t_1 \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{4} + \frac{4-x}{10} \end{aligned}$$

Como podemos observar T_t depende la distancia x y en virtud del enunciado $x \in [0, 4]$, así concluimos que la función T que modela el tiempo en términos de x está dada por

$$\begin{aligned} T : [0, 4] &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ T(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{4} + \frac{4-x}{10}. \end{aligned}$$

La cual para valores $x \in [0, 4]$ es continua y derivable para $x \in (0, 4)$.

b) Los puntos críticos de T .

Solución: Para obtener los puntos críticos buscamos los valores $x \in (0, 4)$ tal que $T'(x) = 0$, entonces, por un lado determinamos la derivada

$$\begin{aligned} T'(x) &= \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{4} \right)' + \left(\frac{4-x}{10} \right)' \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x + \frac{-1}{10} \\ &= \frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{10} \end{aligned}$$

y por otro lado, solucionamos la ecuación $T'(x) = 0$, teniendo que

$$\frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{10}.$$

Ahora, como $1+x^2 > 0$ para todo $x \in [0, 4]$ se tiene

$$\begin{aligned} 10x &= 4\sqrt{1+x^2} && /()^2 \\ 100x^2 &= 16(1+x^2) && /: 4 \\ 25x^2 &= 4(1+x^2) \\ 21x^2 &= 4 \\ 21x^2 - 4 &= 0 \\ (\sqrt{21}x + 2)(\sqrt{21}x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Luego, como el dominio de la función son los valores $x \in [0, 4]$ el conjunto de puntos críticos de la función son los valores extremos del dominio, $x = 0$ y $x = 4$ además del valor que obtuvimos recientemente, es decir, los puntos críticos son

$$x \in \left\{ 0, \frac{2}{\sqrt{21}}, 4 \right\}.$$

c) Los intervalos donde T es creciente y los intervalos donde es decreciente.

Solución: Examinando los signos de $T'(x)$ podremos saber donde $t(x)$ es creciente y decreciente, para esto haremos un arreglo algebraico a $T'(x)$.

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{5x - 2\sqrt{1+x^2}}{20\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(5x - 2\sqrt{1+x^2})}{(20\sqrt{1+x^2})} \cdot \frac{(5x + 2\sqrt{1+x^2})}{(5x + 2\sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{25x^2 - 4(x^2 + 1)}{(20\sqrt{1+x^2})(5x + 2\sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{21x^2 - 4}{(20\sqrt{1+x^2})(5x + 2\sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{(\sqrt{21}x + 2)(\sqrt{21}x - 2)}{(20\sqrt{1+x^2})(5x + 2\sqrt{1+x^2})}. \end{aligned}$$

Notemos que para $x \in (0, 4)$ tenemos

$$\sqrt{21}x + 2 > 0, \quad 20\sqrt{1+x^2} > 0 \quad \text{y} \quad 5x + 2\sqrt{1+x^2} > 0$$

Luego, analizamos los cambio de signo de la derivada de la función

	$x \in \left(0, \frac{2}{\sqrt{21}}\right)$	$x \in \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, 4\right)$
$(\sqrt{21}x + 2)$	+	+
$(\sqrt{21}x - 2)$	-	+
$(20\sqrt{1+x^2})$	+	+
$(5x + 2\sqrt{1+x^2})$	+	+
$T'(x)$	-	+
$T(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

De donde se concluye que

- $T(x)$ es decreciente en el intervalo $\left[0, \frac{2}{\sqrt{21}}\right]$, debido a que $T'(x) < 0$ en ese intervalo.
 - $T(x)$ es creciente en el intervalo $\left[\frac{2}{\sqrt{21}}, 4\right]$, ya que $T'(x) > 0$ en intervalo.
- d) El valor de x para el cual Harold llegará más rápido a su destino, y determine el tiempo que demorará.

Solución: Como el valor $x = \frac{2}{\sqrt{21}}$ es el punto crítico de la función $T(x)$, notemos que inmediatamente a la izquierda de $x = \frac{2}{\sqrt{21}}$ la función es decreciente y a su derecha $T(x)$ es inmediatamente creciente, entonces es *cóncava hacia arriba*, por tanto $T\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$ es un mínimo local de la función.

Para el valor $x = 0$, tenemos que $T(0) = \frac{13}{20} \approx 0,65$, para el valor $x = 4$ función evaluada nos da $T(4) = \frac{\sqrt{17}}{4} \approx 1,03$ y para el valor $x = \frac{2}{\sqrt{21}}$ se tiene

$$\begin{aligned} T\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right) &= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2}}{4} + \frac{4 - \left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right)}{10} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{25}{21}}}{4} + \frac{\frac{4\sqrt{21}-2}{\sqrt{21}}}{10} \\ &= \frac{5}{4\sqrt{21}} + \frac{4\sqrt{21}-2}{10\sqrt{21}} \\ &= \frac{21 + 8\sqrt{21}}{20\sqrt{21}} \\ &\approx 0,63. \end{aligned}$$

De manera que para el valor $x = \frac{2}{\sqrt{21}}$ se obtendrá el tiempo más breve en llegar de A hasta D . Lo que es equivalente aproximadamente a 38 minutos.

Ser perseverante y paciente puede ser mucho mejor que ser talentoso.