Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Ayudantía 5
Criterio de la primera y segunda derivada
08/09/2023

En este taller, determinaremos los posibles puntos donde una función alcanza su valor máximo y su valor mínimo. Además, aplicaremos el criterio de la primera derivada para determinar los intervalos donde la función es creciente y decreciente. Utilizaremos este criterio para determinar los extremos locales de la función. Finalmente, aplicaremos el criterio de la segunda derivada para analizar la concavidad y los puntos de inflexión de una función.

Objetivos:

- Analizar los puntos críticos para determinar el máximo valor y el mínimo valor de una función en un intervalo.
- Aplicar el criterio de la primera derivada para determinar los intervalos de monotonía de la función y/o sus extremos locales.
- Aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión de una función.

Ejercicios Propuestos

1. Para cada una de las siguientes funciones determine los intervalos donde es creciente, los intervalos donde es decreciente, y sus extremos locales.

   a) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2}, \quad x \neq 0.$

   b) $h(x) = x(1-x)^{\frac{2}{3}}, \quad x < 1.$

a) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2}, x \neq 0.$

Solución: Para darle solución a lo pedido, primero notemos que la función g es diferenciable para $x \neq 0$, pues es el cociente de dos polinomios los cuales cumplen la propiedad.

Luego, encontramos la función $g'(x)$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x-1)' \cdot (x^2) - (x-1) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{\color{red}{1} \cdot (x^2) - (x-1) \cdot (\color{red}{2x})}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} \\ &= \frac{-x^2 + 2x}{x^4} \\ &= \frac{x(-x+2)}{x^4}, \\ &= \frac{-x+2}{x^3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$g'(x) = \frac{-x+2}{x^3}, \qquad \text{para } x \neq 0.$$

Ahora, para determinar los intervalos de crecimiento de la función, examinamos los cambios de signo de la función $g'(x)$ en su dominio, es decir,

	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, 2]$	$x \in [2, \infty)]$
$(-x+2)$	$+$	$+$	$-$
x^3	$-$	$+$	$+$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

En virtud de lo señalado, Como $g'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, se concluye que $g(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y en el intervalo $[2, \infty)$.

Además, en el intervalo $(0, 2]$ la función $g(x)$ es creciente, dado que $g'(x) > 0$ en dicho intervalo.

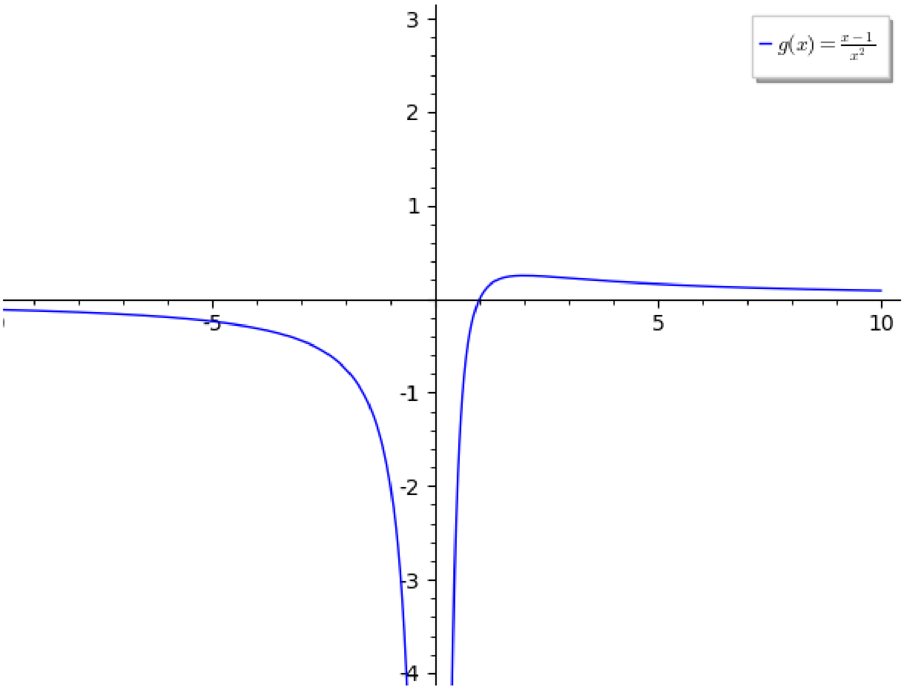
Luego, notemos que los valores $x \in \text{Dom}(g)$ tales que $g'(x) = 0$ (*puntos críticos*), están dados

$$g'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{-x+2}{x^3} = 0.$$

Entonces

$$-x + 2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2.$$

Finalmente podemos concluir que en $x = 2$ hay un máximo local de la función pues en virtud de lo anterior hay un cambio de la monotonía de la función. Situación que puede visualizarse en el siguiente gráfico



b) $h(x) = x(1-x)^{\frac{2}{3}}, x < 1.$

Solución: Encontrando la derivada de $h(x)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= (x)' \cdot ((1-x)^{\frac{2}{3}}) + (x)((1-x)^{\frac{2}{3}})' \\
&= 1 \cdot ((1-x)^{\frac{2}{3}}) + x \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} \\
&= (1-x)^{\frac{2}{3}} + \frac{-2x}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} \\
&= (1-x)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3(1-x)^{\frac{1}{3}}}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} + \frac{-2x}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} \\
&= \frac{3(1-x)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} + \frac{-2x}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} \\
&= \frac{3(1-x)}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} + \frac{-2x}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} \\
&= \frac{3-5x}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}
$$

Luego, como el dominio es un intervalo abierto, los puntos críticos de la función h son tales que

$$
h'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3-5x}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} = 0.
$$

Es decir,

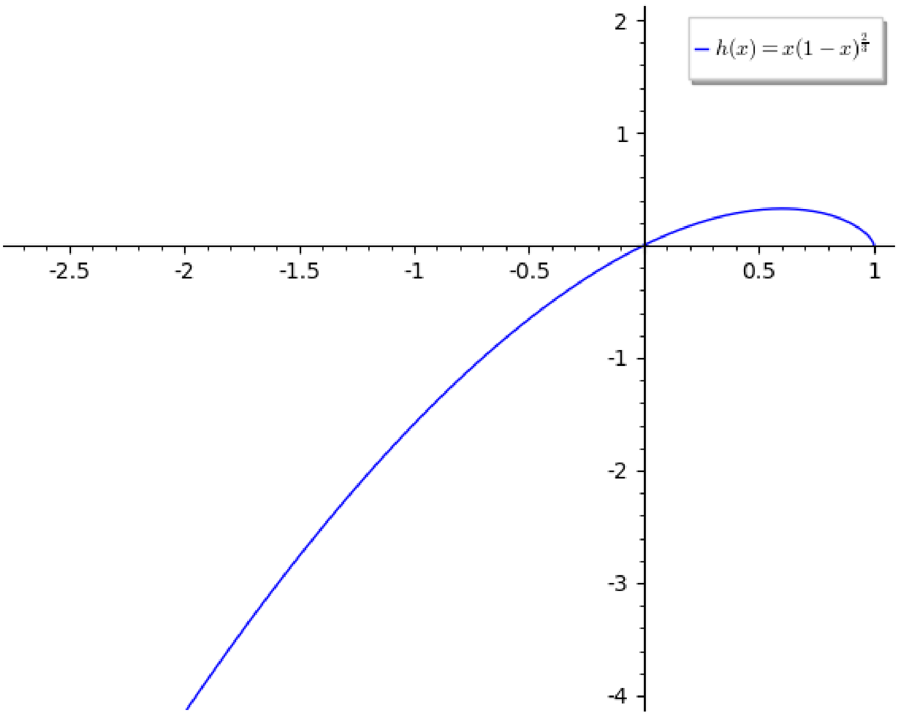
$$3 - 5x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{3}{5}.$$

Además, como $x < 1$, $h'(x)$ tiene el mismo dominio que $h(x)$, luego, observando los cambios de signo de la función $h'(x)$ y considerando que $(1-x)^{\frac{1}{3}} > 0$ para todo $x < 1$, tenemos que

	$x \in (-\infty, 0]$	$x \in \left(0, \frac{3}{5}\right]$	$x \in \left[\frac{3}{5}, 1\right)$
$(3-5x)$	$+$	$+$	$-$
$3(1-x)^{\frac{1}{3}}$	$+$	$+$	$+$
$h'(x)$	$+$	$+$	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

En el análisis anterior se observa que $h(x)$ es creciente en los intervalos $(\infty, 0)$ y $\left(0, \frac{3}{5}\right]$, pues $h'(x) > 0$ en estos intervalos. No obstante, en el intervalo $\left[\frac{3}{5}, 1\right)$ la función h es decreciente, ya que $h'(x) < 0$ en dicho intervalo.

De esta manera, en virtud de análisis anterior, se concluye que en $x = \frac{3}{5}$ hay un máximo local, pues la función h es diferenciable y en cercanías del valor en cuestión hay cambio de monotonía. Situación que se puede visualizar en el siguiente gráfico



2. En la carretera saliendo de una ciudad, la velocidad de los vehículos, medida en kilómetros por hora, que transitan entre las 2 pm y las 6 pm de un día viernes, se modela mediante:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8, \quad t \in [2, 6].$$

a) Determine en qué intervalos, entre las 2 pm y las 6 pm, la velocidad aumenta y en qué intervalos disminuye.

Solución: Considerando la derivada de la función $v(t)$, la cual es diferenciable para todo $t \in \mathbb{R}$, en particular lo es para $t \in [2, 6]$, además, la derivada está dada por

$$v'(t) = 3t^2 - 30t + 72 = 3(t^2 - 10t + 24) = 3(t - 4)(t - 6)\,.$$

Luego, analizando el signo de v' en los valores de nuestro interés, tenemos:

	$x \in [2, 4[$	$x = 4$	$x \in]4, 6[$	$x = 6$
$t - 4$	$-$	0	$+$	$+$
$t - 6$	$-$	$-$	$-$	0
$3(t-4)(t-6)$	$+$	0	$-$	0
$v'(t)$	$+$	0	$-$	0
	$\nearrow$		$\searrow$	

Por lo tanto,

- la velocidad es creciente (acelera) cuando en $t \in]2, 4[$;
- la velocidad disminuye (desacelera) cuando $t \in]4, 6[$.

b) Determine las velocidades máxima y mínima que alcanzan estos vehículos y a qué hora se dan.

Solución: En virtud de lo anterior, se concluye que v alcanza su máximo en $t = 4$ y coincide con el valor $v(4) = 120$ $[km/h]$ y sus valores mínimos (locales) en $t = 2$ y $t = 6$ segundos cuyos valores alcanzan $v(2) = 100$ y $v(6) = 116$ $[km/h]$. De manera que su velocidad mínima fue de 100 $[km/h]$.

3. Considere la función $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{x}$.

Determine los intervalos de concavidad de la función f y concluya si esta tiene puntos de inflexión.

Solución: Para comenzar, notemos que la función f es diferenciable para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y su derivada está dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= x - 2x^{-2} \\ &= x - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{x^3 - 2}{x^2} \end{aligned}$$

Luego, manipulando algebraicamente la expresión anterior, mediante la diferencia de cubos y la completación de cuadrados, podemos concluir que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})}{x^2} \\ &= \frac{(x-\sqrt[3]{2})\left(\left(x+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2+\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4}\right)}{x^2} \end{aligned}$$

Ahora, notamos que las expresiones x^2 y $\left(\left(x+\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2+\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4}\right)$ son expresiones positivas, de modo que el signo de la derivada depende del factor $(x-\sqrt[3]{2})$, concluyendo que

- f es creciente para todos los $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tales que

$$x-\sqrt[3]{2} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in]\sqrt[3]{2}, \infty[\,.$$

- f es decreciente para todos los $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tales que

$$x-\sqrt[3]{2} < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in]-\infty, 0[\cup]0, \sqrt[3]{2}[\,.$$

Por último, notemos que la segunda derivada de f existe para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y está dada por

$$f''(x) = 1+\frac{4}{x^3} = \frac{x^3+4}{x^3}$$

Luego, los puntos de inflexión son los valores del dominio que anulan a la segunda derivada, vale decir,

$$f''(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^3+4}{x^3} = 0\,.$$

En efecto,

$$f''(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^3+4 = 0\,,$$

factorizando podemos concluir que

$$x^3+4 = (x+\sqrt[3]{4})(x^2-\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{16}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -\sqrt[3]{4}$$

de forma tal, que el valor $x = -\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ es un punto de inflexión.