Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Ayudantía 4
Regla de L'Hôpital y asíntotas
01/09/2023

En este taller aplicaremos la regla de L'Hôpital para calcular el valor de algunos límites, y calcularemos las asíntotas verticales y horizontales de funciones.

Objetivos:

- Aplicar la regla de L'Hôpital para el cálculo de límites.
- Calcular límites infinitos, y al infinito, de funciones.
- Analizar la existencia de asíntotas horizontales y asíntotas verticales de funciones.

Ejercicios Propuestos

1. Para las funciones racionales $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ y $h(x) = \dfrac{(1-x)(x+2)}{x^3+3x^2-4x}$ resuelva lo siguiente:

   - Encuentre su dominio.
   - Calcule los límites laterales en los puntos que no pertenecen al dominio.
   - Encuentre sus asíntotas verticales.
   - Encuentre sus asíntotas horizontales.

   a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

   - Encuentre su dominio.

     Solución: En primer lugar, manipulando algebraicamente la regla de asignación de la función f se tiene,

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$$

     Por lo tanto, el dominio de la función está dado por

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

- Calcule los límites laterales en los puntos que no pertenecen al dominio.

  Solución: En primer lugar notemos que $\lim_{x\to -2^-} x^2 = 4 > 0$, además, dado que los factores $(x-2)$ y $(x+2)$ son negativos para $x < -2$ y $\lim_{x\to -2^-}(x+2)(x-2) = 0$, entonces $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{1}{(x+2)(x-2)} = +\infty$. Por lo tanto, podemos concluir que el límite lateral izquierdo está dado por

  $$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} x^2 \cdot \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \infty.$$

  Del mismo modo, dado que el factor $(x-2)$ es negativo y el factor $(x+2)$ es positivo para $x > -2$ y $\lim_{x\to -2^-}(x+2)(x-2) = 0$ entonces, $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{1}{(x+2)(x-2)} = -\infty$. Además, $\lim_{x\to -2^+} x^2 = 4 > 0$ de manera que el límite lateral derecho a $x = -2$ está dado por

  $$\lim_{x\to -2^+} x^2 \cdot \frac{1}{(x-2)(x+2)} = -\infty.$$

  Argumentando de manera análoga, notemos que en las proximidades de $x = 2$ se tiene

	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$x-2$	$-$	0	$+$
$x+2$	$+$	$+$	$+$

  Por lo tanto,

  $$\lim_{x\to 2^-} x^2 \cdot \frac{1}{(x-2)(x+2)} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^+} x^2 \cdot \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \infty.$$

- Encuentre sus asíntotas verticales

  Solución: En virtud de lo anterior, podemos concluir que las asíntotas verticales están dadas por las rectas de ecuación

  $$x = -2$$
  $$x = 2$$

- Encuentre sus asíntotas horizontales.

  Solución: Calculamos los límites al infinito, en efecto

  $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1-\dfrac{4}{x^2}} = 1 = \lim_{x\to \infty} f(x)$$

  Por lo tanto, la gráfica de la función tiene una asíntota cuya ecuación está dada por

  $$y = 1.$$

b) $h(x) = \dfrac{(1-x)(x+2)}{x^3+3x^2-4x}$

- Encuentre su dominio.

  Solución: En primer lugar, manipulando algebraicamente la regla de asignación de la función h, se tiene

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(1-x)(x+2)}{x^3+3x^2-4x} = \frac{(1-x)(x+2)}{x(x^2+3x-4)} \\ &= \frac{(1-x)(x+2)}{x(x+4)(x-1)} = \frac{-(x-1)(x+2)}{x(x+4)(1-x)}, \qquad x \neq 1 \\ &= -\frac{x+2}{x(x+4)}. \end{aligned}$$

  Donde podemos concluir que

$$\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 1\}.$$

- Calcule los límites laterales en los puntos que no pertenecen al dominio.

  Solución: En primer lugar notemos que $\lim\limits_{x\to -4^-} x+2 = -2$, además, dado que para $x < -4$ se tiene $-x > 0$ y $x+4 < 0$ y $\lim\limits_{x\to -4^-} -x(x+4) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{1}{-x(x+4)} = -\infty$. Por lo tanto, el límite lateral izquierdo al valor $x = -4$ está dado por

$$\lim_{x\to -4^-} (x+2) \cdot \frac{1}{(-x)(x+4)} = +\infty$$

  Además, para valores próximos y mayores que $x = -4$ se tiene $-x < 0$ y $x+4 > 0$ y dado que $\lim\limits_{x\to -4^+} -x(x+4) = 0$ se tiene que $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{1}{-x(x+4)} = \infty$. De manera que el límite lateral derecho al valor $x = -4$ está dados por:

$$\lim_{x\to -4^+} (x+2) \cdot \frac{1}{(-x)(x+4)} = -\infty$$

  y argumentando de manera análoga, podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+2}{(-x)(x+4)} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{(-x)(x+4)} = -\infty.$$

  Por último, notemos que para $x = 1$ se tiene

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{(-x)(x+4)} = -\frac{3}{5} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{(-x)(x+4)} = \lim_{x\to 1^+} h(x)$$

- Encuentre sus asíntotas verticales

  Solución: En virtud de lo obtenido en el ítem anterior, la gráfica de la función h tiene asíntotas verticales cuyas ecuaciones están dada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= -4 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

  Cabe mencionar que en $x = 1$ no hay una asíntota vertical ya que el límite existe, es decir:

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = -\frac{3}{5} = \lim_{x\to 1^+} h(x).$$

- Encuentre sus asíntotas horizontales.

  Solución: Calculamos los límites al infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} h(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{(-x)(x+4)} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{-1-\frac{4}{x}} \\ &= 0 = \lim_{x\to+\infty} h(x) \end{aligned}$$

  Por lo cual hay una asíntota horizontal cuya ecuación está dada por $y = 0$.

2. Calcule los siguientes límites, para luego responder las preguntas a continuación.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^3 - 2x^2 + x - 1}{7x^3 - x^2 + 5} \right)$.

   Solución: Nos gustaría aplicar regla de L'Hôpital, consideremos que las funciones que componen tanto el numerador $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$, como el denominador $g(x) = 7x^3 - x^2 + 5$, son funciones continuas y diferenciables en todo $\mathbb{R}$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Luego, calculamos el límite

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(3x^3 - 2x^2 + x - 1)'}{(7x^3 - x^2 + 5)'} \right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{9x^2 - 4x + 1}{21x^2 - 2x} \right). \end{aligned}$$

   Observemos que en la expresión anterior tanto el numerador $h(x) = 9x^2 - 4x + 1$ como el denominador $m(x) = 21x^2 - 2x$ son funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$. Además

$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to\infty} m(x) = \infty$. Para aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital debemos determinar el límite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{h'(x)}{m'(x)}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(9x^2-4x+1)'}{(21x^2-2x)'}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{18x-4}{42x-2}\right).\end{aligned}$$

Nuevamente,apreciemos que se satisfacen las hipótesis necesarias para utilizar la regla de L'Hôpital, es decir las funciones $\phi(x) = 18x - 4$ y $\psi(x) = 42x - 2$ son funciones diferenciables y $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$. Luego calculamos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(18x-4)'}{(42x-2)'}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{18}{42}\right)\\ &= \frac{3}{7}.\end{aligned}$$

Es decir, por regla de L'Hôpital como este último límite existe se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{h'(x)}{m'(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

Por lo tanto

$$\frac{3}{7} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{18x-4}{42x-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x^2-4x+1}{21x^2-2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-2x^2+x-1}{7x^3-x^2+5}\right).$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$.

Solución: Notemos que al intentar resolver de manera directa nos encontramos con una expresión de la forma $(\infty(\infty - \infty))$, entonces manipulando algebraicamente la expresión tendríamos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x((\sqrt{1+x^2})^2-x^2)}{(\sqrt{1+x^2}+x)}.\end{aligned}$$

Recordemos que $1 + x^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+x^2-x^2)}{(\sqrt{1+x^2}+x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\sqrt{1+x^2}+x)}.$$

Además, tanto el numerador $f(x) = x$, como el denominador $g(x) = \sqrt{1+x^2}+x$ son funciones diferenciables y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Luego calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(\sqrt{1+x^2}+x)'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}{1+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como este último límite existe, mediante la regla de L'Hôpital se concluye

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\sqrt{1+x^2}+x)} = \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)\,.$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)$.

Solución: Si quisiéramos calcular este limite de manera inmediata observaríamos una expresión del tipo $(\infty - \infty)$, entonces cambiaremos su forma algebraica para poder utilizar la regla de L'Hôpital. Es decir,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\operatorname{sen}(x)} - \frac{x}{x\operatorname{sen}(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x\operatorname{sen}(x)}\right)\,.
\end{aligned}$$

Ahora, Considerando $f(x) = \operatorname{sen}(x) - x$ y $g(x) = x\operatorname{sen}(x)$, las que son funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$ y $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Procedemos a calcular el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\operatorname{sen}(x)-x)'}{(x\operatorname{sen}(x))'}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)-1}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)}\right)\,.
\end{aligned}$$

Luego, notemos que tanto el numerador $\ell(x) = \cos(x) - 1$, como denominador $w(x) = \operatorname{sen}(x) + x\cos(x)$ son funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$, calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ell'(x)}{w'(x)}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(\cos(x)-1)'}{(\operatorname{sen}(x)+x\cos(x))'}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+(\cos(x)-x\operatorname{sen}(x))}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)}\right)\\
&= \left(\frac{-\operatorname{sen}(0)}{2\underbrace{\cos(0)}_{=1}-0\cdot\operatorname{sen}(0)}\right)\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Finalizando, como el último límite existe, mediante la regla de L'Hôpital se concluye que

$$0 = \lim_{x\to 0}\frac{\ell'(x)}{w'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}$.

Solución: Primero notemos que tanto el numerador $f(x) = 1 - \cos(x^2)$ como el denominador $g(x) = x^4$ son funciones continuas y además diferenciables en $\mathbb{R}$, en particular en cualquier intervalo abierto que contenga al cero. Además, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ entonces para aplicar la regla de L'Hôpital, calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x^2))'}{(x^4)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{sen}(x^2)}{4x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2}\,.
\end{aligned}$$

Donde en la expresión anterior nuevamente, considerando $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ y $t(x) = 2x^2$ podemos notar que corresponden a funciones continuas y diferenciables en 0 y $\lim\limits_{x\to 0} h(x) =$

$\lim\limits_{x\to 0} t(x)$=0. Entonces para aplicar otra vez la regla de L'Hôpital, calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{h'(x)}{t'(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)'}{(2x^2)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{4x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Ahora, como este ultimo límite existe, en virtud de la regla de L'Hôpital podemos concluir que

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{h'(x)}{t'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Finalmente se concluye que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2}$$

Observación: Notemos que al aplicar el cambio de variable $u = x^2$, el proceso era más óptimo.

- En los ítem a) y b) ¿es cierto que la función respectiva posee una asíntota horizontal hacia el infinito positivo?

  Solución: En virtud que

  $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-2x^2+x-1}{7x^3-x^2+5}\right) = \frac{3}{7} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{1}{2}\,,$$

  podemos concluir que las funciones cuyas reglas de asignación son $f(x) = \dfrac{3x^3-2x^2+x-1}{7x^3-x^2+5}$ y $g(x) = x(\sqrt{1+x^2}-x)$ tienen respectivamente una asíntota horizontal al infinito positivo dada por las rectas cuyas ecuaciones son: $y = 3/7$ e $y = 1/2$.

- En los ítem c) y d) ¿es cierto que la función respectiva posee una asíntota vertical en $x = 0$?.

  Solución: En virtud que

  $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2}\,,$$

  podemos concluir que ambas funciones cuyas reglas de asignación son $f(x) = \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$ y $g(x) = \dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4}$ no tienen una asíntota vertical en $x = 0$.

3. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuya regla de asignación es $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{2x^2+1}$. Analice la existencia de asíntotas horizontales para las funciones f y f'.

Solución: En primer lugar notamos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty^+} f(x) &= \lim_{x\to\infty^+} \frac{4x^2-1}{2x^2+1} \\
&= \lim_{x\to\infty^+} \frac{4-\dfrac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-1}{2x^2+1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{4-\dfrac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} \\
&= 2\,,
\end{aligned}$$

Por lo cual, podemos concluir que la función f tiene una asíntota horizontal cuya ecuación está dada por $y = 2$.

Además, la función f es diferenciable para todo $x \in \mathbb{R}$ debido a que es el cociente entre dos polinomios (cada uno diferenciable en $\mathbb{R}$) y para todo $x \in \mathbb{R}$ el denominador $2x^2+1 \neq 0$. Luego, aplicando reglas de derivación se tiene

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(4x^2-1)'\cdot(2x^2+1) - (4x^2-1)\cdot(2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2} \\
&= \frac{8x(2x^2+1) - 4x(4x^2-1)}{(2x^2+1)^2} \\
&= \frac{4x+1}{(2x^2+1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Ahora, estudiando asíntotas horizontales para la función f', por un lado tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f'(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{(2x^2+1)^2} \cdot \frac{\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{1}{x^4}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2} \\
&= \frac{0}{2^2} = 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty^+} f'(x) &= \lim_{x\to\infty^+} \frac{4x+1}{(2x^2+1)^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} \\
&= \lim_{x\to\infty^+} \frac{\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^2} \\
&= \frac{0}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f' tiene una asíntota horizontal cuya ecuación está dada por $y = 0$.