Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Solución Ayudantía 3
Reglas de derivación y derivadas de funciones trigonométricas

25/09/2023

En este taller comenzaremos ejercitando límites notables relacionados con funciones trigonométricas. Además, practicaremos las reglas de derivación de funciones, aplicando regla de la cadena y las derivadas de funciones trigonométricas, entre otras y analizaremos algunos problemas de recta tangente.

Objetivos:

- Aplicar límites notables que incluyen funciones trigonométricas.
- Derivar funciones aplicando las reglas de derivación incluyendo regla de la cadena.
- Aplicar las derivadas de funciones trigonométricas.

Ejercicios Propuestos

1. Calcule los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$.

   Solución: En primer lugar, notemos que

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}\,.$$

   Luego, dado que

   $$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1$$

   considerando $u(x) = 3x$, podemos notar que si $x \to 0$, entonces $u \to 0$, por lo cual,

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}\,.$$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x) - \cos(5x)}{3x}$.

   Solución: En primer lugar, notemos que

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(5x)}{3x} &= \lim_{x\to 0} \frac{-1+\cos(2x)+1 - \cos(5x)}{3x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{3x} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(5x)}{3x}\,.\end{aligned}$$

Luego, para concluir el valor del límite original, estudiaremos cada uno de los límites del lado derecho, en efecto

- Por un lado, notemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{3x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{2x}$$

- Por otro lado, notemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x)}{3x}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x)}{5x}$$

Ahora, dado que

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u)}{u}=0\,,$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{2x}=0=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x)}{5x}$$

Por lo tanto, en virtud del álgebra de límites, se obtene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-\cos(5x)}{3x}=\frac{2}{3}\cdot 0+\frac{5}{3}\cdot 0=0\,.$$

2. Calcule la derivada de las siguientes funciones:

a) $g(x)=\dfrac{(x^2+x)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{1+x+x^2}$.

Solución: Primero que todo, notemos que manipulando algebraicamente la regla de asignación de la función, se tiene

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{(x^2+x)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{1+x+x^2}\\&=\frac{(x^2+x+1-1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{1+x+x^2}\\&=\frac{(x^2+x+1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}-\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{1+x+x^2}\\&=\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}-\frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

Luego, $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\neq 0$ y notemos que la función g es diferenciable, pues cada una de funciones que componen a la función g son diferenciables en $\mathbb{R}$.

Ahora, aplicamos las reglas de derivación, para ello, por un lado notemos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}=\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}(x)=\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}-1}(x)\cdot\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x)=\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-\frac{2}{3}}(x)\cos(x)\,.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} &= \frac{\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}\right)'\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)-\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}\right)\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)'}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\\ &= \frac{\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-\frac{2}{3}}(x)\cos(x)\right)\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)-\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}\right)\cdot\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 1\right)}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\\ &= \frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}-\frac{(2x+1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}\frac{dg(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}-\frac{d}{dx}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}}-\left(\frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}-\frac{(2x+1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\right)\\ &= \frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}}-\frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{(2x+1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\\ &= \frac{\cos(x)(x^2+x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{(2x+1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}.\end{aligned}$$

b) $f(x)=\cos^2(5x)+x\operatorname{sen}(3x)-\cos(x^2)$.

Solución: En primer lugar notemos que la función f es diferenciable, pues es la composición de funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}$. Luego, aplicando las reglas de derivación, se tiene

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2\cos(5x)\cdot(\cos(5x))'+1\cdot\operatorname{sen}(3x)+x\cdot\cos(3x)\cdot(3x)'+\operatorname{sen}(x^2)\cdot(x^2)'\\ &= 2\cos(5x)\cdot-\operatorname{sen}(5x)\cdot 5+\operatorname{sen}(3x)+x\cdot\cos(3x)\cdot 3+\operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\\ &= -10\cos(5x)\operatorname{sen}(5x)+\operatorname{sen}(3x)+3x\cos(3x)+2x\operatorname{sen}(x^2).\end{aligned}$$

3. Considere la función $f : [0, 5] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya regla de asignación está dada por

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}.$$

Muestre que la recta tangente en en cualquier punto del gráfico es perpendicular al segmento de recta que une el origen con dicho punto.

Hint: Recuerde que dos rectas son ortogonales si el producto de sus pendientes es -1

Solución: Considerando $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ podemos notar que la función f es diferenciable en su dominio y su derivada está dada por

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot -2x = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

De esta manera, para un punto $(x_0, y_0) \in [0, 5]$ la ecuación de la recta tangente está dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

donde $f(x_0) = y_0 = \sqrt{25 - x_0^2}$.

Es decir, particularmente en nuestro caso se tiene

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{25 - x_0^2} - \frac{x_0}{\sqrt{25 - x_0^2}}(x - x_0) \\ &= y_0 - \frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \\ &= -\frac{x_0}{y_0} \cdot x + \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0}. \end{aligned}$$

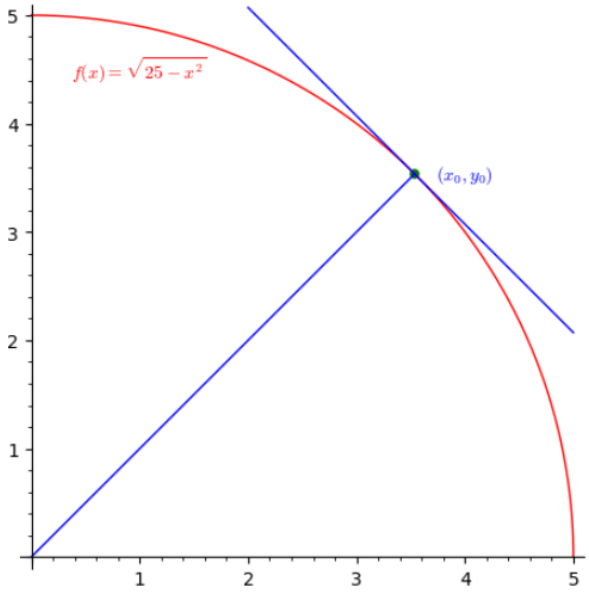
Por otro lado, la recta que une el origen (0,0) y el punto (x_0, y_0) está dada por

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x + (y_0 - x_0).$$

Finalmente, notamos que si m_1 y m_2 denotan las pendientes de la recta tangente y la recta que une el cero con el punto en cuestión respectivamente, se satisface

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -1$$

De donde se concluye que la recta tangente al gráfico de f es cualquier punto es perpendicular al segmento de recta que lo une con el origen.



4. Considere la función $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(81, f(81))$.

   Solución: La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(81, f(81))$ tiene ecuación

   $$y = f'(81)(x - 81) + f(81).$$

   Para determinar aquella recta, calculamos primero $f(81)$:

   $$f(81) = \sqrt[4]{81} = 3.$$

   Por otra parte, para calcular $f'(81)$, determinamos primero la regla de asignación de f':

   $$f'(x) = \left(\sqrt[4]{x}\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

   Luego,

   $$f'(81) = \frac{1}{4\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{4 \cdot 27} = \frac{1}{108}.$$

   Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(81, f(81))$ es

   $$\begin{aligned} y = \frac{1}{108}(x - 81) + 3 &\iff y = \frac{x}{108} - \frac{3}{4} + 3 \\ &\iff y = \frac{x}{108} + \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

5. La posición $x(t)$, en un instante t, de una partícula que describe un movimiento armónico simple, está dada por

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi),$$

donde A, ω y ϕ son números reales constantes. Demuestre que la función x satisface la siguiente *ecuación de movimiento armónico simple*

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Solución: Para poder demostrar que $x(t)$ satisface la ecuación, debemos calcular la segunda derivada de $x(t)$, es decir, $x''(t)$.

Si $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$ entonces tenemos que $x'(t)$ es

$$\begin{aligned} x'(t) &= (A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi))' \\ &= A(\mathrm{sen}(\omega t + \phi))' \\ &= A\cos(\omega t + \phi) \cdot (\omega t + \phi)' \\ &= A\cos(\omega t + \phi) \cdot \omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera derivada de $x(t)$ está dada por

$$x'(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi).$$

Luego tenemos que $x''(t)$ es

$$\begin{aligned} x''(t) &= (A\omega\cos(\omega t + \phi))' \\ &= A\omega(\cos(\omega t + \phi))' \\ &= A\omega \cdot -\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \cdot (\omega t + \phi)' \\ &= A\omega \cdot -\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \cdot \omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la segunda derivada de $x(t)$ está dada por

$$x''(t) = -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi).$$

Luego obtenemos que

$$\begin{aligned} x''(t) + \omega^2 x(t) &= -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) + \omega^2 \cdot A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \\ &= -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) + A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir, x satisface la ecuación de movimiento armónico simple.