

Pr1) calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$

Sol: vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}$$

$$= \frac{3}{2} \underbrace{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u}}_{\text{conocido} = 1} = \frac{3}{2}$$

hacemos cv
 $u = 3x$
si $x \rightarrow 0$, entonces
 $u \rightarrow 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos(5x)}{3x}$

Recuerde el límite trigonométrico conocido:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Sol: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos(5x)}{3x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(5x)) - (1 - \cos(2x))}{3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{5x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{2x}$$

$$= \frac{3}{3} \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot 0 = 0.$$

(2)

P2 | calcule derivadas:

$$a) g(x) = \frac{(x^2 + x) \sqrt[3]{\sin(x)}}{1 + x + x^2}$$

sol: Notamos que:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x^2 + x + 1) \sqrt[3]{\sin(x)} - \sqrt[3]{\sin(x)}}{x^2 + x + 1} \\ &= \sqrt[3]{\sin(x)} - \frac{\sqrt[3]{\sin(x)}}{x^2 + x + 1} \\ &= (\sin(x))^{\frac{1}{3}} - \frac{(\sin(x))^{\frac{1}{3}}}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Para derivar esto, notamos que

$$a) [(\sin(x))^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3} (\sin(x))^{-\frac{2}{3}} \cdot \cos(x)$$

$$b) [x^2 + x + 1]' = 2x + 1.$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} g'(x) &= [(\sin(x))^{\frac{1}{3}}]' - \frac{[(\sin(x))^{\frac{1}{3}}]' (x^2 + x + 1) - (\sin(x))^{\frac{1}{3}} (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{1}{3} (\sin(x))^{-\frac{2}{3}} \cos(x) - \frac{\frac{1}{3} (\sin(x))^{-\frac{2}{3}} \cos(x) (x^2 + x + 1) - (\sin(x))^{\frac{1}{3}} (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$$b) f(x) = \cos^2(5x) + x \operatorname{sen}(3x) - \cos(x^2)$$

(3)

sol: vemos q e

$$\begin{aligned} \bullet) [\cos^2(5x)]' &= 2\cos(5x) \cdot (-\operatorname{sen}(5x)) \cdot 5 \\ &= -10\cos(5x)\operatorname{sen}(5x) \end{aligned}$$

usamos:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \quad \Rightarrow -5\cos(10x)$$

$$\begin{aligned} \bullet\bullet) [x \operatorname{sen}(3x)]' &= 1 \cdot \operatorname{sen}(3x) + x \cos(3x) \cdot 3 \\ &= \operatorname{sen}(3x) + 3x \cos(3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\bullet\bullet) [\cos(x^2)]' &= -\operatorname{sen}(x^2) \cdot 2x \\ &= -2x \operatorname{sen}(x^2) \end{aligned}$$

por lo q e:

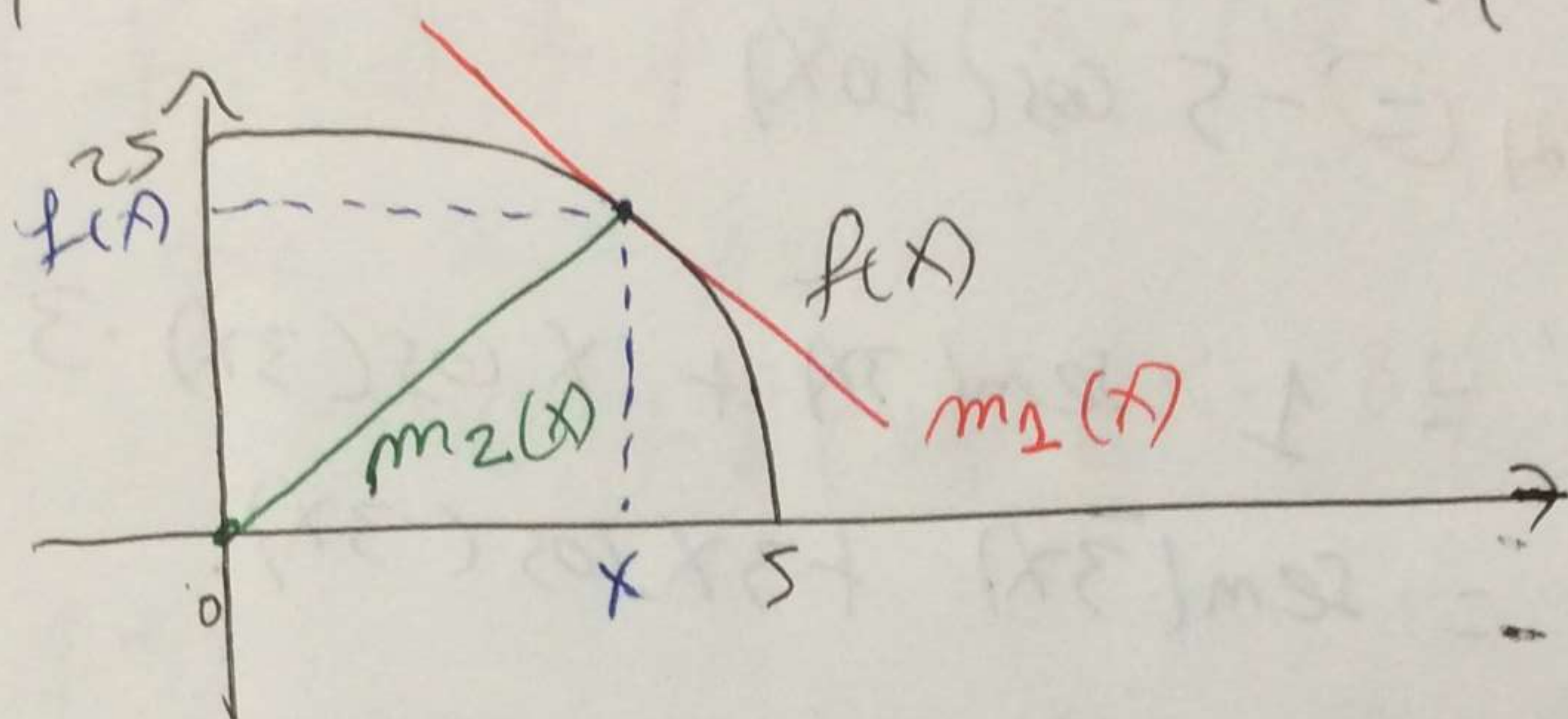
$$f'(x) = -5\cos(10x) + \operatorname{sen}(3x) + 3x \cos(3x) - 2x \operatorname{sen}(x^2)$$

P3) Considere $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ por

(4)

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Mostrar que la recta tangente en cualquier punto del gráfico es perpendicular al segmento de recta que une el origen con el punto.



Por geometría, vemos que para $x \in [0, 5]$

$$m_2(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}$$

$$\text{mientras que } m_1(x) = f'(x) = [(25 - x^2)^{1/2}]' \\ = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Así, vemos que

$$m_1(x) \cdot m_2(x) = \cancel{-\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{25 - x^2}}{\cancel{x}} = -1.$$

Por lo que las rectas son perpendiculares.

P4) Considere $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

Encuentre la tangente en $(81, f(81))$.

Sol: como vimos en la ayudantía anterior:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

En este caso, $x_0 = 81$

$$\Rightarrow y = f(81) + f'(81)(x - 81).$$

vemos que:

$$f(81) = \sqrt[4]{81} = 3$$

$$f'(x) = [x^{1/4}]' = \frac{1}{4} x^{-3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3}$$

Por lo que

$$f'(81) = \frac{1}{(\sqrt[4]{81})^3} = \frac{1}{27}$$

Así, la recta viene dada por:

$$y = 3 + \frac{1}{27}(x - 81) = \frac{1}{27}x + 3 - \frac{81}{27} = \frac{1}{27}x$$

P51

6

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

(A, ω , ϕ ctes). Probar q e

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

sd: $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

$$\rightarrow x'(t) = A \cos(\omega t + \phi) \cdot \omega$$

$$\rightarrow x''(t) = -A \sin(\omega t + \phi) \cdot \omega^2$$

$$= -\omega^2 \underbrace{(A \sin(\omega t + \phi))}_{x(t)} = -\omega^2 x(t)$$

Así que cuando, se obtiene:

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad \square$$