Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Ayudantía 2
TVI, recta tangente y reglas de derivación
18/08/2023

En este taller se abordarán aplicaciones del Teorema del Valor Intermedio (TVI); además, determinaremos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una curva y calcularemos algunas derivadas utilizando las reglas de derivación.

Objetivos:

- Aplicar el TVI a un problema de contexto.
- Justificar la continuidad de funciones a partir del álgebra de funciones continuas.
- Aplicar reglas de derivación tales como suma, resta, producto y cociente de funciones.
- Determina la recta tangente al gráfico de una función en un punto de ella.

Ejercicios Propuestos

1. Dos móviles se mueven en línea recta y sus distancias (en metros) a cierto punto de referencia en un tiempo $t \in [0, 10]$, medido en segundos, están dadas por las fórmulas $t^3 + 100t + 1000$ y $t^3 + 300t + 500$, respectivamente. Demuestre que en cierto instante entre los 0 y 10 segundos la razón entre la distancia del primer móvil y la del segundo es $6 : 5$.

   Solución: Para $t \in [0, 10]$ sea h la razón entre la distancia del primer y la del segundo móvil respectivamente, cuya regla de asignación, en virtud de la información del enunciado, está dada por
   $$h(t) = \frac{t^3 + 100t + 1000}{t^3 + 300t + 500}$$
   la cual es continua para $t \geq 0$, pues es la división de polinomios con denominador no nulo. Además, notemos que
   $$h(0) = \frac{1000}{500} = 2 \qquad \text{y} \qquad h(10) = \frac{3000}{4500} = \frac{2}{3}\,.$$
   Finalmente, dado que h es continua en $0 \leq t \leq 10$ y $\frac{2}{3} < \frac{6}{5} < 2$, en virtud del teorema del valor intermedio existe un $t_0 \in [0, 10]$ tal que
   $$h(t_0) = \frac{6}{5}\,,$$
   vale decir, existe un instante t_0 entre los 0 y 10 segundos para el cual la razón entre la distancia del primer móvil y la del segundo es $6 : 5$.

2. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 2$. Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1, f(1))$.

Solución: Recordemos inicialmente que las aproximaciones afines o rectas tangentes de una función h diferenciable en un punto $x = a$ son de la forma,

$$L(x) = h'(a)(x-a) + h(a).$$

Ahora, como la función f es diferenciable para todo $\mathbb{R}$, pues es una función polinomial, en particular lo es para $x = 1$. Además, la función derivada de f está dada por

$$f'(x) = 8x^3 - 14x \qquad \Longrightarrow \qquad f'(1) = 6\,.$$

Entonces, la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $(1, f(1))$ está dada por

$$\begin{aligned} L(x) &= f'(1)\cdot(x-1) + f(1) \\ &= 6\cdot(x-1) - 3 \\ &= 6x - 9. \end{aligned}$$

3. Suponga que f y g son dos funciones diferenciables en $\mathbb{R}$, tales que cumplen:

$$f(2) = 1, \qquad f'(2) = -2, \qquad g(2) = -1, \qquad g'(2) = 4.$$

Sea F una nueva función cuya regla de asignación corresponde a $F(x) = \dfrac{f(x) + 2g(x)}{3 - f(x)\cdot g(x)}$. Calcule $F'(2)$.

Solución: Lo primero que notaremos es que la función F es un cociente de funciones, entonces para hallar la derivada aplicaremos la regla del cociente. ie, Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $m(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La derivada de la función cociente está dada por

$$\left(\frac{h}{m}\right)' = \frac{h'\cdot m - h\cdot m'}{m^2}.$$

Notando que $3 - f(2)\cdot g(2) \neq 0$ podemos aplicar lo anterior a la función F obteniendo,

$$F'(x) = \frac{(f(x) + 2g(x))'\cdot(3 - f(x)\cdot g(x)) - (f(x) + 2g(x))\cdot(3 - f(x)\cdot g(x))'}{(3 - f(x)\cdot g(x))^2}.$$

Ahora, notemos que dentro del lado derecho de la fracción debemos determinar la derivada de la expresión $f(x)+2g(x)$, para esto, recordamos que la derivada de la suma de funciones diferenciales también lo es y corresponde a la suma de las derivadas, es decir,

$$(\ f(x) + 2g(x)\ )\ ' = f'(x) + 2g'(x).$$

Por último, requerimos de la derivada de la expresión $3 - f(x)\cdot g(x)$. Para esto recordamos por una parte que la derivada de una constante es nula y por otra, si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables, entonces el producto también lo es y la derivada está dada por

$$(h\cdot m)' = h'\cdot m + h\cdot m'\ .$$

Es decir, aplicando las reglas anteriormente mencionadas, tenemos

$$(\ 3 - f(x) \cdot g(x) \ ) \ ' = (\ 3 \ )' - (\ f(x) \cdot g(x) \ )' = -(f'(x) \ g(x) + f(x) \ g'(x)).$$

En virtud de lo anterior,

$$\begin{aligned}
F(x)' &= \frac{(f(x) + 2g(x))' \cdot (3 - f(x) \cdot g(x)) - (f(x) + 2g(x)) \cdot (3 - f(x) \cdot g(x))'}{(3 - f(x) \cdot g(x))^2} \\
&= \frac{(f'(x) + 2g'(x)) \cdot (3 - f(x) \cdot g(x)) + (f(x) + 2g(x)) \cdot (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))}{(3 - f(x) \cdot g(x))^2} \\
&= \frac{(3f' - f'fg + 6g' - 2fgg') + (ff'g + f^2g' + 2f'g^2 + 2fgg')}{(3 - f \cdot g)^2} \\
&= \frac{3f'(x) + 6g'(x) + f^2(x)g'(x) + 2g^2(x)f'(x)}{(3 - f(x) \cdot g(x))^2} \, .
\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando los valores indicados en el enunciado, podemos concluir que,

$$\begin{aligned}
F'(2) &= \frac{3f'(2) + 6g'(2) + f^2(2)g'(2) + 2g^2(2)f'(2)}{(3 - f(2) \cdot g(2))^2} \\
&= \frac{4(-2) + 6(4) + (1)^2(4) + 2(-1)^2(-2)}{(3 - (1) \cdot (-1))^2} \\
&= \frac{-8 + 24 + 4 - 4}{4^2} \\
&= 1 \, .
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$F'(2) = 1.$$

4. Calcule la derivada de las funciones dadas por las siguientes fórmulas:

   a) $h(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x^2 + x + 1)}$

   Solución: En primer lugar, notemos que

   $$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$$

   Además, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $x^2 + x + 1 \neq 0$, luego h es una función diferenciable pues es el cociente de polinomios con denominador no nulo. Luego, en virtud de las reglas de derivación su derivada está dada por:

   $$\begin{aligned}
   h'(x) &= \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + x + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} \\
   &= \frac{2x(x^2 + x + 1) - (x^2 - 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\
   &= \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} \, .
   \end{aligned}$$

b) $k(t) = \dfrac{x^4 + 7x^3 - 2}{(x+1)} + \dfrac{(x^2 - 1)}{(2x+1)}$

Solución: En primer lugar, manipulando la expresión mediante la división de polinomios, notemos que

$$\frac{x^4 + 7x^3 - 2}{(x+1)} = \frac{(x^3 + 6x^2 - 6x + 6)(x+1) - 8}{(x+1)} = x^3 + 6x^2 - 6x + 6 - \frac{8}{x+1}\,,$$

y

$$\frac{(x^2 - 1)}{(2x+1)} = \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)(2x+1) - \frac{3}{4}}{(2x+1)} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3/4}{2x+1}\,.$$

Por lo cual, para $x \neq -1$ y para $x \neq -\frac{1}{2}$, se tiene

$$k(x) = \frac{x^4 + 7x^3 - 2}{(x+1)} + \frac{(x^2 - 1)}{(2x+1)} = x^3 + 6x^2 - \frac{11x}{2} - \frac{23}{4} - \frac{8}{x+1} - \frac{3/4}{2x+1}$$

Luego, bajo las mismas condiciones anteriores y aplicando las reglas de derivación, se tiene que

$$k'(x) = 3x^2 + 12x - \frac{11}{2} + \frac{8}{(x+1)^2} + \frac{3/2}{(2x+1)^2}\,.$$