Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2023

Solución Ayudantía 1
Límites y continuidad

11/08/2023

En este taller, estudiaremos límites de funciones utilizando las propiedades de límites que ya hemos visto. Además, analizaremos la existencia de algunos límites y determinaremos su valor en el caso de que existan. Finalmente, estudiaremos la continuidad de ciertas funciones.

Objetivos:

- Examinar la pertinencia de las propiedades de álgebra de límites para su correcto uso.
- Calcular límites de funciones utilizando propiedades conocidas.
- Analizar la continuidad de funciones en un punto.
- Determinar continuidad en todo su dominio.

Ejercicios Propuestos

1. Calcule los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-4x-6}{8x+8}$

   Solución: Manipulando algebraicamente la expresión, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-4x-6}{8x+8} &= \lim_{x\to -1} \frac{2(x^2-2x-3)}{8(x+1)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)(x-3)}{8(x+1)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x-3}{4} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-4x-6}{8x+8} = -1$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^7-4x^3}{7x^5+3x^2}$

Solución: En primer lugar, notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^7-4x^3}{7x^5+3x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^7-4x^3}{7x^5+3x^2} \cdot \frac{\dfrac{1}{x^7}}{\dfrac{1}{x^7}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\dfrac{4}{x^4}}{\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{3}{x^5}}
\end{aligned}$$

Ahora, dado que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^5} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^7-4x^3}{7x^5+3x^2} = \lim_{u\to0^+} \frac{2}{u} = +\infty$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^7-4x^3}{7x^5+3x^2} = +\infty.$$

c) $\lim\limits_{t\to3^-} \dfrac{|t-3|-6}{t+3}$

Solución: Dado que que el límite buscado es por la izquierda, notemos que el factor $(t-3)$ es negativo para $t<3$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to3^-} \frac{|t-3|-6}{t+3} &= \lim_{t\to3^-} \frac{-(t-3)-6}{t+3} \\
&= \lim_{t\to3^-} \frac{-t+3-6}{t+3} \\
&= \lim_{t\to3^-} \frac{-t-3}{t+3} \\
&= \lim_{t\to3^-} \frac{-(t+3)}{t+3} \\
&= -1
\end{aligned}$$

2. Considere las funciones f y g descritas por

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}} \qquad\qquad g(x) = \frac{3x^4 - 4}{5x^4 + 2x^2}$$

Calcule (si es posible) los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}} \cdot \frac{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{4 + x - (4 - x)} \\
&= \lim_{x \to 0} 2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}) \\
&= 8.
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

Solución: Notemos que

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{3x^4 - 4}{5x^4 + 2x^2} = \lim_{x \to 0} (3x^4 - 4) \cdot \frac{1}{5x^4 + 2x^2}$$

Además,

$$\lim_{x \to 0} 3x^4 - 4 = -4 \, .$$

y dado que $5x^4 + 2x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{5x^4 + 2x^2} = +\infty \, .$$

por lo cual,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty \, .$$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x))$.

Solución: Dado que los límites anteriores están dados por $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 8 > 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$, entonces,

$$\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty \, .$$

d) $\lim_{x\to 0}(f(x)+x^2g(x))$.

Solución: En primer lugar, notemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x^2g(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(3x^4-4)}{x^2(5x^2+2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^4-4}{5x^2+2} = -2\end{aligned}$$

Ahora, dada la existencia de cada uno de los límites involucrados en la suma, por álgebra de límites se concluye que

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+x^2g(x)) = \lim_{x\to 0} f(x) \; + \; \lim_{x\to 0} x^2g(x) = 8+(-2) = 6$$

3. Responda según corresponda:

a) Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2-5x+2} & \text{si} \quad x<2 \\[2ex] \dfrac{1}{12} & \text{si} \quad x=2 \\[2ex] \dfrac{x-1}{x+10} & \text{si} \quad x>2 \end{cases} \tag{1}$$

Demuestre que f es continua en $x=2$.

Solución: Sabemos que f es continua en $x=2$ si $2\in \mathrm{Dom} f$ y

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2),$$

Dado que $2\in \mathrm{Dom} f$ y $f(2)=\dfrac{1}{12}$, entonces nos falta verificar que el límite exista, en efecto por un lado,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2-5x+2}\\ &= \lim_{x\to 2^-}\frac{x+2-4}{(2x-1)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\ &= \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(2x-1)(\sqrt{x+2}+2)}\\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x+10} = \frac{1}{12}.$$

Por lo tanto, el límite existe y está dado por

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{12}.$$

Finalmente, en virtud de lo anterior se concluye que f es continua en $x = 2$.

b) Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x+2} & \text{si} \quad x < -3 \\[2ex] ax + b & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 2 \\[2ex] \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \tag{2}$$

Encuentre los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que g sea continua en todo su dominio.

Solución : Como queremos que g sea continua, se debe satisfacer las siguientes condiciones

$$\text{i.} \quad \lim_{x\to -3} \left(\frac{x+3}{x+2}\right) = f(-3)$$
$$\text{ii.} \quad \lim_{x\to 2} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-2}\right) = f(2)$$

Es decir, por una parte de i., se tiene

$$0 = -3a + b.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-2}\right) &= \lim_{x\to 2} \left(\frac{x(x^2 - 3x + 2)}{x-2}\right) \\ &= \lim_{x\to 2} \left(\frac{x(x-1)(x-2)}{x-2}\right) \\ &= \lim_{x\to 2} (x(x-1)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$2 = 2a + b.$$

Luego, obtenemos un sistema de ecuaciones para las variables a, b,

$$\left.\begin{array}{rcl} -3a+b & = & 0 \\ 2a+b & = & 2 \end{array}\right|$$

Si multiplicamos por -1 la primera ecuación, se tiene

$$0 = 3a - b$$
$$2 = 2a + b$$

Sumando lo anterior,

$$2 = 5a$$
$$a = \frac{2}{5}.$$

De manera que, $b = \dfrac{6}{5}$.

Finalmente, concluimos que

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x+2}, & x < -3 \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{6}{5}, & -3 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$$

y notemos que g es continua, por un lado para $x \in]-\infty, -3[$ pues es el cociente de funciones continuas y $x + 2 \neq 0$ en el intervalo; por otro lado, para $x \in]2, \infty[$ se tiene que $x - 2 \neq 0$ de manera que por álgebra de funciones continuas g también lo es; y para todo $x \in [-3, 2]$ por construcción. Luego, g es continua para todo $\mathbb{R}$.