

Agudantia 2

1

PA calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 4x - 6}{8x + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x^2 - 2x - 3)}{8(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{4} \cdot \frac{(x-3)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{4} = \frac{-2-3}{4} = -1.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^7 - 4x^3}{7x^5 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2x^5 - 4x)}{x^2(7x^3 + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 4x}{7x^3 + 3}$$

↪ como la potencia mayor del numerador supera a la potencia mayor del denominador, este límite es $+\infty$.

$$(c) \lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{|t-3| - 6}{t+3}$$

como $t < 3$, entonces $t-3 < 0$ y $|t-3| = -(t-3)$.
por lo que nos queda:

$$= \lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{-(t-3) - 6}{t+3} = \lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{-t+3-6}{t+3} = \lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{-(t+3)}{t+3}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 3^-} (-1) = -1.$$

P2) considere las funciones

(2)

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}$$

$$g(x) = \frac{3x^4 - 4}{5x^4 + 2x^2}$$

calcular:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}} \cdot \frac{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{(4+x) - (4-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2(\underbrace{\sqrt{4+x}}_{\rightarrow 2} + \underbrace{\sqrt{4-x}}_{\rightarrow 2}) = 8$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 - 4}{x^2(5x^2 + 2)} = \frac{-4}{0}$$

Tenemos entonces una situación de tipo $\frac{c}{0}$ con $c \neq 0$. En consecuencia, este límite no existe y podemos analizar límites laterales para ver si es $\pm \infty$.

Nota: Ya que la función g es par (verificar ∇) y la estamos analizand^o (3) en torno a $x=0$, nos basta con ver un solo límite lateral.

Vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^4 - 4}{x^2(5x^2 + 2)}$$

$\rightarrow -4 < 0$
 $\rightarrow 0$ $\rightarrow 2 > 0$

Como la expresión mantiene signo negativo para $x \rightarrow 0^+$, tendremos entonces que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty.$$

Y por la paridad,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty.$$

En consecuencia, al coincidir ambos laterales, decimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty.$$

(4)

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x).$$

Ya que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 8$ y $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

tenemos por propiedad que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = -\infty.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + x^2 g(x))$$

Como ya conocemos $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, con la esperanza de usar la propiedad del límite de la suma, analizamos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{3x^4 - 4}{x^2(5x^2 + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 - 4}{5x^2 + 2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Por lo tanto, el límite original existe y es

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + x^2 g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x)$$

$$= 8 - 2 = 6.$$

P3]

5

a) considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x^2 - 5x + 2} & x < 2 \\ \frac{1}{12} & x = 2 \\ \frac{x-1}{x+20} & x > 2 \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en $x=2$.

sol: Para esto, habría que comprobar que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{1}{12}$$

y para esto, analizamos los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\overbrace{x-1}^{- \rightarrow 1}}{\underbrace{x+20}_{\rightarrow 22 \neq 0}} = \frac{1}{22}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{(2x-4)(x-2)} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\overbrace{(x+2) - 4}^{x \rightarrow 2}}{(2x-4)(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\underbrace{(2x-4)}_{\rightarrow 0} \underbrace{(\sqrt{x+2} + 2)}_{\rightarrow 4}} = \frac{1}{12}$$

como ambos laterales coinciden, entonces (6)
el límite existe y cumple

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{22} = f(2)$$

que es la continuidad de f en $x=2$.

(b) considere $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x+2} & x < -3 \\ ax+b & x \in [-3, 2] \\ \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-2} & x > 2 \end{cases}$$

Encuentre los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que g sea continua en todo su dominio

sd: Ya sabemos por álgebra de funciones continuas que g es continua en $\mathbb{R} - (-3, 2]$, nos queda ~~verificar~~ asegurar su continuidad en estos dos puntos.

veamos que

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\overbrace{x+3}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{x+2}_{\rightarrow -1 \neq 0}} = 0.$$

Además,

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \cancel{g(x)} (ax+b) = -3a+b$$
$$(\quad = g(-3) \quad)$$

Entonces, como primera condición, debe cumplirse que

$$-3a+b=0 \quad (1)$$

Ahora, analizamos en $x=2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax+b) = 2a+b (= g(2))$$

y además,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x^2-3x+2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \overbrace{x(x-2)}^{\rightarrow 2} = 2$$

$\rightarrow 1$

Así que como segunda y última condición debemos tener que:

$$2a+b=2$$

Tenemos entonces:

8

$$(1) \quad -3a + b = 0$$

$$(2) \quad 2a + b = 2$$

$$(2) - (1)$$

$$-5a = -2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{5}}$$

$$\text{em (2): } b = 2 - 2a = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

por lo que las constantes son

$$\boxed{\begin{matrix} a = \frac{2}{5} \\ b = \frac{6}{5} \end{matrix}}$$