



Programa de Bachillerato Matemáticas 2, curso B



Resolución Ayudantía N° 11

Ayudante: Maximiliano Aravena Salcedo.

10 de noviembre de 2023

Tiempo: 90 minutos.

1. a) **Desarrollo:**

La población inicial se refiere a la población en el instante inicial. Ó sea, $t = 0$. Con la función dada,

$$\begin{aligned}f(t=0) &= \ln((t-1)^2 + e^2 - 1), \\&= \ln((0-1)^2 + e^2 - 1), \\&= \ln(1 + e^2 - 1), \\&= \ln(e^2), \\&= 2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $f(0) = 2$, la población del cultivo es de 2000 unidades.

- b) **Desarrollo:** Para determinar la población mínima debemos calcular el mínimo la función $f(t)$. Para ello determinaremos su derivada con la regla de la cadena y la derivada del logaritmo natural:

$$\begin{aligned}f(t) &= \ln((t-1)^2 + e^2 - 1), \\f'(t) &= \ln'((t-1)^2 + e^2 - 1)((t-1)^2 + e^2 - 1)', \\f'(t) &= \frac{1}{(t-1)^2 + e^2 - 1} \cdot (2(t-1) \cdot 1 + 0 + 0), \\f'(t) &= \frac{2(t-1)}{(t-1)^2 + e^2 - 1}.\end{aligned}$$

Desarrollando el cuadrado,

$$f'(t) = \frac{2(t-1)}{t^2 - 2t + e^2} \quad (1)$$

Tenemos que el determinante de $(t^2 - 2t + e^2)$ es $(4 - 4 \cdot 1 \cdot e^2) \leq 0$, por lo que sabemos que el denominador de $f'(t)$ es siempre positivo. Por otro lado, el numerador $2(t-1)$ es igual a cero cuando $t = 1$. Con esto construimos nuestra tabla de valores:

	$t \in [0, 1)$	$t = 1$	$t \in (1, +\infty)$
$2(t-1)$	-	0	+
$t^2 - 2t + e^2$	+	+	+
$f'(t)$	-	0	+

Cuadro 1: Tabla de valores de la derivada

Observamos que la función decrece para $t \in [0, 1)$, alcanza su mínimo en $t = 1$ y luego crece en $t \in (1, +\infty)$. Por lo tanto, el mínimo de población está dado por,

$$\begin{aligned}f(1) &= \ln((t-1)^2 + e^2 - 1), \\&= \ln(e^2 - 1), \\&= \ln(e+1)(e-1), \\&= \ln(e+1) + \ln(e-1)\end{aligned}$$

Notemos que $2 < e < 3$, por lo que $e+1 > 1$ y $e-1 > 1$. Así, $\ln(e+1) > 0$ y $\ln(e-1) > 0$. Con esto,

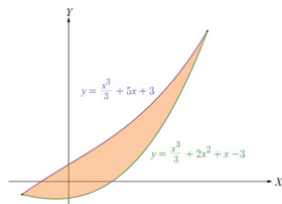
$$f(1) = \ln(e+1) + \ln(e-1) > 0$$

En conclusión, la población no se extingue porque alcanza un mínimo mayor a 0 y luego crece.

2. **Desarrollo:** Para determinar el área A entre las curvas debemos integrar la diferencia entre ellas.

$$A = \int_a^b \left[\left(\frac{x^3}{3} + 5x + 3 \right) - \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 3 \right) \right] dx = \int_a^b (-2x^2 + 4x + 6) dx. \quad (2)$$

Los límites de integración $a < b$ son los valores del dominio para los cuales las funciones se intersectan en la figura.



Ó sea, tenemos que son las soluciones de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{3} + 5x + 3 &= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 3, \\ 5x + 3 &= 2x^2 + x - 3, \\ 0 &= 2x^2 - 4x - 6, \\ 0 &= x^2 - 2x - 3, \\ 0 &= (x - 3)(x + 1). \end{aligned}$$

Luego, $a = -1$ y $b = 3$. Con esto en la ecuación (2):

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx, \\ &= \left(\frac{-2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 6x \right) \Big|_{-1}^3, \\ &= \left(\frac{-2 \cdot 3^3}{3} + \frac{4 \cdot 3^2}{2} + 6 \cdot 3 \right) - \left(\frac{-2 \cdot (-1)^3}{3} + \frac{4 \cdot (-1)^2}{2} + 6 \cdot (-1) \right), \\ &= (-18 + 18 + 18) - (-2/3 + 2 - 6), \\ &= 22 + 2/3. \end{aligned}$$

Con esto, el área entre curvas es de $22 + 2/3$ unidades cuadradas.

¿Cómo saber qué diferencia de curvas integrar si no hubiésemos tenido el gráfico?:

Note que siempre debemos integrar la diferencia que en el intervalo de integración sea positiva, puesto que las áreas son positivas. Como la diferencia entre las curvas viene dada por la siguiente ecuación:

$$\Delta y = -2x^2 + 4x + 6 = -2(x - 3)(x + 1),$$

verificamos que su signo sea positivo entre los límites de integración con la siguiente tabla de valores:

	$x = -1$	$x \in (-1, 3)$	$x = 3$
$-2(x - 3)$	+	+	0
$(x + 1)$	0	+	+
Δy	0	+	0

Como Δy es positiva en el intervalo de integración, escogimos bien la diferencia a integrar.

Si en un intervalo Δy hubiese sido menor a cero, para dicho intervalo tenemos que integrar $-\Delta y$. Así, las áreas siempre son positivas y no se restan.

3. Desarrollo

Determinaremos el volumen V del trompo con el método del disco. Es decir, integraremos el área $A(x)$ de los discos que se obtienen al hacer cortes al trompo.

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Un disco en la posición x es una circunferencia con radio $y(x) = \sqrt{\frac{84}{5\pi}} \cdot x^2(1-x)$, por lo tanto el área viene dada por:

$$A(x) = y^2(x)\pi = \frac{84}{5\pi}x^4(1-x)^2 \cdot \pi = \frac{84x^4(1-x)^2}{5}$$

Con esto,

$$V = \int_a^b \frac{84x^4(1-x)^2}{5} dx.$$

Los límites de integración son los valores del dominio en que y se intersecta con el eje horizontal. Ó sea, $y(x) = 0$. Con ello, $a = 0$ y $b = 1$.

Así,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \frac{84x^4(1-x)^2}{5} dx, \\ &= \int_0^1 \frac{84x^4(1-2x+x^2)}{5} dx, \\ &= \int_0^1 \frac{84x^4 - 168x^5 + 84x^6}{5} dx, \\ &= \left[\frac{84x^5}{25} - \frac{168x^6}{30} + \frac{84x^7}{35} \right] \Big|_0^1, \\ &= \frac{84}{25} - \frac{168}{30} + \frac{84}{35}, \\ &= 0,16 \end{aligned}$$

Así, $V = 0,16 \text{ [dm}^3\text{]}$, lo que es igual a $160 \text{ [cm}^3\text{]}$. (Note que $1 \text{ [dm]} = 10 \text{ [cm]}$, por lo que $1 \text{ [dm}^3\text{]} = 1000 \text{ [cm}^3\text{]}$).

4. **Desarrollo:** Para variables continuas en un intervalo $[a, b]$ determinamos el promedio $\bar{x}$ de una función de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Para esta función $y(x)$,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1-0}{1} \int_0^1 y(x) dx, \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{84}{5\pi}} \cdot x^2(1-x) dx, \\ &= \sqrt{\frac{84}{5\pi}} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx, \\ &= \sqrt{\frac{84}{5\pi}} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right] \Big|_0^1, \\ &= \sqrt{\frac{84}{5\pi}} [1/3 - 1/2 + 1/5], \\ &= \sqrt{\frac{84}{5\pi}} \cdot \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

*