



Programa de Bachillerato Matemáticas 2, curso B



Resolución Ayudantía N° 8

Ayudante: Maximiliano Aravena Salcedo.

13 de octubre de 2023

Tiempo: 90 minutos.

1. a) $I = \int (3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3}) dx$

Solución: La integral de la suma o la resta puede separarse en suma o resta de integrales,

$$I = \int (3x^{-3}) dx + \int (\sqrt{x^5}) dx - \int (2x^{2/3}) dx.$$

Además, la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de dicha función,

$$I = 3 \int (x^{-3}) dx + \int (\sqrt{x^5}) dx - 2 \int (x^{2/3}) dx.$$

Expresando la raíz como potencia,

$$I = 3 \int (x^{-3}) dx + \int (x^{5/2}) dx - 2 \int (x^{2/3}) dx,$$

y aplicando la regla de la potencia para integrales tenemos,

$$\begin{aligned} I &= 3 \left(\frac{x^{-2}}{-2} + C_1 \right) + \frac{x^{7/2}}{7/2} + C_2 - 2 \left(\frac{x^{5/3}}{5/3} + C_3 \right), \\ &= \frac{3x^{-2}}{-2} + \frac{2x^{7/2}}{7} - \frac{6x^{5/3}}{5} + (3C_1 + C_2 - 2C_3), \end{aligned}$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son constantes de integración que reunimos en la constante $C = (3C_1 + C_2 - 2C_3)$. Con esto,

$$\int (3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3}) dx = \frac{3x^{-2}}{-2} + \frac{2x^{7/2}}{7} - \frac{6x^{5/3}}{5} + C.$$

b) $I = \int_{-3}^1 z(9 - z^2)^3 dz$

Solución: Realizaremos un cambio de variable, tomando $u = (9 - z^2)$. Eso significa que debemos modificar también los límites de integración:

- Límite superior: $z_s = 1 \implies u_s = 9 - 1 = 8$,
- Límite inferior: $z_i = -3 \implies u_i = 9 - 9 = 0$.

Luego,

$$I = \int_0^8 zu^3 dz.$$

Esta expresión debe ajustarse para estar solo en términos de u , por lo que revisaremos cuál es el diferencial de u . Ó sea, du :

$$u = 9 - z^2 \implies du = -2zdz \implies dz = \frac{du}{-2z}.$$

Así,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^8 zu^3 dz, \\ &= \int_0^8 zu^3 \frac{du}{-2z}, \\ &= \int_0^8 u^3 \frac{du}{-2}, \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^8 u^3 du. \end{aligned}$$

Con la regla de la potencia y evaluando en los límites de integración,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \int_0^8 u^3 du, \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{u^4}{4} \Big|_0^8 \right), \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{8^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right), \\ &= -512. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int_{-3}^1 z(9 - z^2)^3 dz = -512.$$

c) $I = \int \left(\frac{ax^2 + a^3 \cos(x)}{\sqrt{a}} \right) dx$, con $a > 0$ una constante.

Solución: Como la integral de la suma se puede separar en suma de integrales y a es una constante, tenemos que,

$$I = \frac{a}{\sqrt{a}} \int x^2 dx + \frac{a^3}{\sqrt{a}} \int \cos(x) dx.$$

Con la integral de la potencia, la integral del coseno y agrupando las constantes de integración:

$$\begin{aligned} I &= \frac{a}{\sqrt{a}} \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) + \frac{a^3}{\sqrt{a}} (\sin(x) + C_2), \\ &= \frac{a}{\sqrt{a}} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{a^3}{\sqrt{a}} \sin(x) + \left(\frac{a}{\sqrt{a}} C_1 + \frac{a^3}{\sqrt{a}} C_2 \right), \\ &= \frac{ax^3}{3\sqrt{a}} + \frac{a^3}{\sqrt{a}} \sin(x) + C. \end{aligned}$$

En síntesis,

$$\int \left(\frac{ax^2 + a^3 \cos(x)}{\sqrt{a}} \right) dx = \frac{ax^3}{3\sqrt{a}} + \frac{a^3}{\sqrt{a}} \sin(x) + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$.

2. a) **Solución:** La velocidad $v(t)$ de la partícula en un tiempo t puede determinarse como la velocidad inicial v_i más la variación $\Delta v(t)$ que ha tenido la velocidad desde el instante inicial $t = 0$ hasta el tiempo t :

$$v(t) = v_i + \Delta v(t).$$

Como la aceleración mide la variación de la velocidad en el tiempo, tenemos que:

$$v'(t) = a(t) \implies \Delta v(t) = \int_0^t a(t) dt$$

Por lo tanto, para cualquier instante $t > 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_i + \Delta v(t), \\ &= v_i + \int_0^t a(t) dt, \\ &= v_i + \int_0^t \frac{\pi}{2} \sin(\pi t) dt. \end{aligned}$$

Notemos que,

$$(\cos(\pi t))' = -\pi \sin \pi t.$$

Luego,

$$\begin{aligned} v(t) &= v_i + \int_0^t \frac{\pi}{2} \sin(\pi t) dt, \\ &= v_i + \int_0^t \left(-\frac{1}{2} (\cos(\pi t))' \right) dt, \\ &= v_i + -\frac{1}{2} \int_0^t (\cos(\pi t))' dt, \\ &= v_i + -\frac{1}{2} \left(\cos(\pi t) \Big|_0^t \right), \\ &= v_i + -\frac{1}{2} (\cos(\pi t) - \cos(0)), \\ &= v_i + -\frac{1}{2} (\cos(\pi t) - 1), \\ &= v_i + \frac{1 - \cos(\pi t)}{2}. \end{aligned}$$

Como la velocidad inicial es 1/4 [m/s],

$$v(t) = 1/4 + \frac{1 - \cos(\pi t)}{2}. \quad (1)$$

- b) La posición $x(t)$ de la partícula en cualquier instante t es su posición inicial x_i más el desplazamiento que ha tenido en ese tiempo t .

$$x(t) = x_i + \Delta x(t).$$

La velocidad mide la variación de la posición en el tiempo, por lo que tenemos que:

$$x'(t) = v(t) \implies \Delta x(t) = \int_0^t v(t) dt.$$

Luego entonces, para cualquier tiempo $t > 0$ se tiene:

$$x(t) = x_i + \int_0^t v(t) dt. \quad (2)$$

Con la ecuación (1) en la ecuación (2),

$$\begin{aligned} x(t) &= x_i + \int_0^t v(t) dt, \\ &= x_i + \int_0^t \left(\frac{1}{4} + \frac{1 - \cos(\pi t)}{2} \right) dt, \\ &= x_i + \int_0^t \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\cos(\pi t)}{2} \right) dt, \\ &= x_i + \int_0^t \left(\frac{3}{4} - \frac{\cos(\pi t)}{2} \right) dt, \\ &= x_i + \left(\frac{3t}{4} \Big|_0^t \right) - \int_0^t \frac{\cos(\pi t)}{2} dt, \\ &= x_i + \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \int_0^t \cos(\pi t) dt. \end{aligned}$$

Notemos que,

$$(\sin(\pi t))' = \pi \cos(\pi t).$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_i + \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \int_0^t \cos(\pi t) dt, \\
 &= x_i + \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\pi}{\pi} \cos(\pi t) dt, \\
 &= x_i + \frac{3t}{4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^t \pi \cos(\pi t) dt, \\
 &= x_i + \frac{3t}{4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^t (\sin(\pi t))' dt, \\
 &= x_i + \frac{3t}{4} - \frac{1}{2\pi} \left(\sin(\pi t) \Big|_0^t \right), \\
 &= x_i + \frac{3t}{4} - \frac{\sin(\pi t)}{2\pi}.
 \end{aligned}$$

Como la posición inicial es 5 [m],

$$x(t) = 5 + \frac{3t}{4} - \frac{\sin(\pi t)}{2\pi}.$$

3. a) Solución: Se tiene que,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int F'(x) dx, \\
 &= \int \left(3x\sqrt{x} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x) \right) dx, \\
 &= \int \left(3x^{3/2} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x) \right) dx, \\
 &= 3 \left(\frac{2x^{5/2}}{5} + C_1 \right) + \sin(x) + C_2 - \int \frac{dx}{(x+2)^2}, \\
 &= \frac{6x^{5/2}}{5} + \sin(x) + (3C_1 + C_2) - \int \frac{dx}{(x+2)^2}.
 \end{aligned}$$

En la integral de la derecha hacemos el cambio de variable $(x+2) = u$, con lo cual $du = dx$:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{6x^{5/2}}{5} + \sin(x) + (3C_1 + C_2) - \int \frac{dx}{(x+2)^2}. \\
 &= \frac{6x^{5/2}}{5} + \sin(x) + (3C_1 + C_2) - \int \frac{du}{u^2}, \\
 &= \frac{6x^{5/2}}{5} + \sin(x) + (3C_1 + C_2) - \left(\frac{1}{u} + C_3 \right), \\
 &= \frac{6x^{5/2}}{5} + \sin(x) - \frac{1}{x+2} + (3C_1 + C_2 - C_3).
 \end{aligned}$$

Reuniendo las constantes de integración en $C = 3C_1 + C_2 - C_3$,

$$F(x) = \frac{6x^{5/2}}{5} + \sin(x) - \frac{1}{x+2} + C$$

Como $F(0) = 2/3$,

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3} &= \frac{6 \cdot 0^{5/2}}{5} + \sin(0) - \frac{1}{0+2} + C, \\
 \frac{2}{3} &= -\frac{1}{2} + C, \\
 C &= \frac{7}{6}.
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$F(x) = \frac{6x^{5/2}}{5} + \sin(x) - \frac{1}{x+2} + \frac{7}{6}.$$

b) **Solución:** Se tiene que,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int F'(x) dx, \\ &= \int \frac{3x dx}{\sqrt{2x^2 + 9}}. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $u = 2x^2 + 9$ tenemos que,

$$u = 2x^2 + 9 \implies du = 4x dx \implies \frac{du}{4x} = dx.$$

Con esto,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{3x dx}{\sqrt{2x^2 + 9}}, \\ &= \int \frac{3x \frac{du}{4x}}{\sqrt{u}}, \\ &= \frac{3}{4} \int \frac{du}{\sqrt{u}}, \\ &= \frac{3}{4} \int u^{1/2} du, \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{2u^{3/2}}{3} + C_1 \right), \\ &= \frac{u^{3/2}}{2} + \frac{3}{4} C_1, \\ &= \frac{u^{3/2}}{2} + C, \\ &= \frac{(2x^2 + 9)^{3/2}}{2} + C, \end{aligned}$$

donde $C = 3C_1/4$ es la constante de integración. Como $F(0) = 1$ tenemos que,

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{(2 \cdot 0^2 + 9)^{3/2}}{2} + C, \\ 1 &= \frac{9^{3/2}}{2} + C, \\ 1 - \frac{9^{3/2}}{2} &= C. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$F(x) = \frac{(2x^2 + 9)^{3/2}}{2} 1 - \frac{9^{3/2}}{2}.$$

4. Solución: Tenemos que,

$$h'(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{(t+1)^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} h(t) &= \int \left(\sqrt{t} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt, \\ &= \int t^{1/2} dt + \int \frac{dt}{(t+1)^2}, \\ &= \frac{2t^{3/2}}{3} - \frac{1}{t+1} + C, \end{aligned}$$

donde C es la constante de integración y por tanto la altura inicial ($h(0) = C$).

Si a los 2 años alcanza los 5 metros de altura tenemos que,

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{2 \cdot 2^{3/2}}{3} - \frac{1}{2+1} + C, \\ 5 &= \frac{2^{5/2} - 1}{3} + C, \\ C &= 5 - \frac{2^{5/2} - 1}{3}, \\ C &\approx 3,45. \end{aligned}$$

por lo que altura a la que se trasplantó el árbol fue de aproximadamente 3 metros con 45 centímetros.

5. Solución: Tenemos que,

$$\int_{-2}^8 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^8 f(x)dx.$$

Primero veamos la integral de la izquierda,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 f(x)dx &= \int_{-2}^0 (\sin(2x) + x^2) dx, \\ &= \left(\frac{-\cos(2x)}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^0, \\ &= \left(\frac{-\cos(2 \cdot 0)}{2} + \frac{0^3}{3} \right) - \left(\frac{-\cos(2 \cdot 2)}{2} + \frac{2^3}{3} \right), \\ &= -\frac{1}{2} - \left(\frac{-\cos(4)}{2} + \frac{8}{3} \right), \\ &= -\frac{19}{6} + \frac{\cos(4)}{2}. \end{aligned}$$

Ahora veamos la integral de la derecha,

$$\begin{aligned} \int_0^8 f(x)dx &= \int_0^8 (4\sqrt{x+1} - 2\sqrt[3]{x+8}) dx, \\ &= 4 \int_0^8 \sqrt{x+1} dx - 2 \int_0^8 \sqrt[3]{x+8} dx, \end{aligned}$$

Veamos las primitivas con los cambios de variables $u = x + 1$ y $z = x + 8$, tales que $du = dx = dz$:

■ Para $\int \sqrt{x+1} dx$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x+1} dx &= \int \sqrt{u} du, \\ &= \int u^{1/2} du, \\ &= \frac{2u^{3/2}}{3} + C_1, \\ &= \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} + C_1. \end{aligned}$$

■ Para $\int \sqrt[3]{x+8} dx$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x+8} dx &= \int \sqrt[3]{z} dz, \\ &= \int z^{1/3} dz, \\ &= \frac{3z^{4/3}}{4} + C_2, \\ &= \frac{3(x+8)^{4/3}}{4} + C_2. \end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned} \int_0^8 f(x)dx &= 4 \int_0^8 \sqrt{x+1} dx - 2 \int_0^8 \sqrt[3]{x+8} dx, \\ &= \left(\frac{8(x+1)^{3/2}}{3} - \frac{6(x+8)^{4/3}}{4} \right) \Big|_0^8, \\ &= \left(\frac{8 \cdot 9^{3/2}}{3} - \frac{6 \cdot 16^{4/3}}{4} \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{6 \cdot 8^{4/3}}{4} \right). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^8 f(x)dx &= \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^8 f(x)dx, \\ &= -\frac{19}{6} + \frac{\cos(4)}{2} + \left(\frac{8 \cdot 9^{3/2}}{3} - \frac{6 \cdot 16^{4/3}}{4} \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{6 \cdot 8^{4/3}}{4} \right), \\ &\approx 29,37.\end{aligned}$$

*