Programa de Bachillerato
Matemáticas 2, curso B

Resolución Ayudantía N° 3

Ayudante: Maximiliano Aravena Salcedo.

25 de agosto de 2023 Tiempo: 90 minutos.

---

1. *a*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$

Solución: Utilizando el cambio de variable $u = 3x$ se tiene que $x \to 0$ implica que $u \to 0$. Además, $x = u/3$. Con esto podemos reescribir el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{2u/3} = \frac{3}{2} \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}.$$

Sabemos que,

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1,$$

así que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x} = \frac{3}{2}.$$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x) - \cos(5x)}{3x}$

Solución: Con la resta de cosenos tenemos que,

$$\cos(2x) - \cos(5x) = 2\sin(7x/2)\sin(-3x/2).$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(5x)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(7x/2)\sin(-3x/2)}{3x}.$$

Con el cambio de variable $u = 7x/2$ tenemos que $u \to 0$ y $x = 2u/7$. Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(7x/2)\sin(-3x/2)}{3x} = \lim_{u\to 0} \frac{2\sin(u)\sin(-3u/7)}{6u/7}. \tag{1}$$

Como sabemos que $\lim_{u\to 0}(-3u/7) = 0$ y $\lim_{u\to 0} \sin(u)/u = 1$, entonces este límite del producto de funciones se puede separar en el producto de límites:

$$\lim_{u\to 0} \frac{2\sin(u)\sin(-3u/7)}{6u/7} = \frac{14}{6} \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} \lim_{u\to 0} \sin(-3u/7) = \frac{14}{6} \cdot 1 \cdot 0.$$

Con todo esto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(5x)}{3x} = 0.$$

2. *a*) $g(x) = \dfrac{(x^2+x)\sqrt[3]{\sin(x)}}{1+x+x^2}$

Se tiene que $g_1(x) = (x^2+x)\sqrt[3]{\sin(x)}$ y $g_2(x) = (1+x+x^2)$ son diferenciables en todo $\mathbb{R}$ y además $g_2(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $g(x)$ es diferenciable y su derivada viene dada por,

$$g'(x) = \frac{g_1'(x)g_2(x) - g_2'(x)g_1(x)}{(g_2(x))^2}. \tag{2}$$

La derivada de $g_1(x)$ se determina con la derivada del producto:

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= (x^2+x)'\sqrt[3]{\sin(x)} + (\sqrt[3]{\sin(x)})'(x^2+x), \\ &= (2x+1)\sqrt[3]{\sin(x)} + (\sqrt[3]{\sin(x)})'(x^2+x). \end{aligned} \tag{3}$$

Luego, esto requiere determinar la derivada de la función compuesta $(\sqrt[3]{\sin(x)})$ por lo que aplicamos la regla de la cadena. Para esto, debemos considerar que $(\sqrt[3]{x})' = 1/(3\sqrt[3]{x^2})$ y $\sin'(x) = \cos(x)$. Así,

$$(\sqrt[3]{\sin(x)})' = \frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\sin^2(x)}}. \tag{4}$$

Con (4) en (3) se tiene,

$$g_1'(x) = (2x+1)\sqrt[3]{\sin(x)} + \frac{\cos(x)(x^2+x)}{3\sqrt[3]{\sin^2(x)}}.$$

Por otro lado, $g_2'(x) = (1+x+x^2)' = 1+2x$. Con todo esto en (2),

$$g'(x) = \frac{\left((2x+1)\sqrt[3]{\sin(x)} + \frac{\cos(x)(x^2+x)}{3\sqrt[3]{\sin^2(x)}}\right) - \left((x^2+x)\sqrt[3]{\sin(x)}\right)(2x+1)\Big)}{(1+x+x^2)^2}.$$

b) $f(x) = \cos^2 5x + x\sin(3x) - \cos(x^2)$

Solución: f es suma de funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}$, por lo que es diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Para determinar su derivada consideraremos las funciones $f_1(x) = \cos^2 5x$, $f_2(x) = x\sin(3x)$ y $f_3(x) = \cos(x^2)$, con lo cual,

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x). \tag{5}$$

Con regla de la cadena tenemos que,

$$f_1'(x) = -10\cos(5x)\sin(5x),$$

pues $(x^2)' = 2x$ y $\cos(5x) = -5\sin(5x)$. Luego con la derivada del producto,

$$f_2'(x) = x'\sin(3x) + x\sin'(3x) = \sin(3x) + 3x\cos(3x).$$

Nuevamente con la regla de la cadena,

$$f_3'(x) = -2x\sin x^2.$$

Con todo esto en (5),

$$f'(x) = -10\cos(5x)\sin(5x) + \sin(3x) + 3x\cos(3x) + 2x\sin x^2.$$

3. Solución: Veamos primero el segmento de recta que une el origen (punto $(0,0)$) con cualquier punto $(x_i, f(x_i))$ del gráfico de la función f. Su pendiente m_1 estará dada por,

$$m_1 = \frac{f(x_i)-0}{x_i-0} = \frac{\sqrt{25-x_i^2}}{x_i},$$

para todo punto a excepción de $(0, f(0))$. Por ello, mostraremos lo solicitado para dos casos:

- $x_i \in]0,5]$: La pendiente m_2 de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_i, f(x_i))$ es la derivada de f en dicho punto,

$$\begin{aligned} m_2 &= f'(x_i), \\ &= (\sqrt{25-x^2})', \\ &= \frac{-x_i}{\sqrt{25-x_i^2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Multiplicando m_1 con m_2 se obtiene -1, con lo cual sabemos que las rectas son ortogonales.

$$m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{\sqrt{25-x_i^2}}{x_i}\right)\left(\frac{-x_i}{\sqrt{25-x_i^2}}\right) = -1.$$

- $x_i = 0$: En este caso estamos inspeccionando un solo punto, el $(0,5)$. En dicho punto la recta tangente tiene pendiente nula por lo que es una recta horizontal (para notarlo basta reemplazar $x_i = 0$ en la ecuación (6)). Luego, el segmento de recta que une al origen con $(0,5)$ es una recta vertical, por lo que es ortogonal a la recta tangente.

4. **Solución:** La recta tangente al gráfico de f en el punto $(81, f(81))$ está dada por la siguiente ecuación:

$$y = mx + n, \tag{7}$$

donde n es el intercepto y m la pendiente. Como se trata de una recta tangente a un gráfico en el punto ya mencionado

$$m = f'(81),$$

considerando que $f'(x) = 1/(4x^{3/4})$ entonces tenemos que $m = 1/108$. Con esto en (7),

$$y = \frac{x}{108} + n.$$

Esta recta pasa por $(81, f(81))$ por lo que

$$\begin{aligned} f(81) &= \frac{81}{108} + n, \\ 3 &= \frac{81}{108} + n, \\ n &= 3 - \frac{81}{108}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y = \frac{x}{108} + 3 - \frac{81}{108}.$$

5. **Demostración:** la función $x(t)$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada está dada por,

$$x'(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi). \tag{8}$$

Luego, $x'(x)$ también es diferenciable por lo que podemos determinar la segunda derivada de $x(t)$,

$$x''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi). \tag{9}$$

Notamos en la ecuación (9) que esta se relaciona con $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$:

$$x''(t) = -\omega^2 x(t), \tag{10}$$

con lo cual $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$. ■

*