



Programa de Bachillerato Matemáticas 2, curso B



Resolución Ayudantía N° 2

Ayudante: Maximiliano Aravena Salcedo.

18 de agosto de 2023

Tiempo: 90 minutos.

- 1. Lema:** *Teorema del Valor Intermedio.* Si una función f es continua en $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

Demostración: Sean $f(t)$ y $g(t)$ las funciones dadas que modelan la distancia de los móviles desde un punto de referencia para un tiempo $t \in [0, 10]$:

$$f(t) = t^3 + 100t + 1000,$$

$$g(t) = t^3 + 300t + 500.$$

Y defínase además la función $r(t)$ dada por la razón $f(t)/g(t)$ para cada tiempo $t \in [0, 10]$.

Como $r(t)$ es la razón de dos funciones polinómicas definidas en el intervalo $[0, 10]$, las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$ y $r(t)$ no se indetermina para ningún $t \in [0, 10]$, entonces sabemos que r es continua en el intervalo $[0, 10]$. Por otro lado, se tiene que,

$$r(10) = \frac{2}{3} < \frac{6}{5} < 2 = r(0).$$

Entonces, por el Teorema del Valor Intermedio sabemos que existe un instante $t_1 \in [0, 10]$ tal que $r(t_1) = 6/5$. Ó sea, que existe un instante entre 0 y 10 segundos tal que la razón entre la distancia del punto de referencia del primer y el segundo móvil es $6/5$. ■

- 2. Solución:** La pendiente m de la recta $y(x) = mx + n$ que es tangente al gráfico de una función f en un punto $(x_0, f(x_0))$ es la derivada de dicha función en ese punto. En este caso corresponde derivar una función polinomial.

$$f'(x) = 8x^3 - 14x,$$

por lo que la pendiente m de la recta tangente a f en $(1, f(1))$ viene dada por:

$$m = f'(1) = 8 \cdot 1^3 - 14 \cdot 1 = -6.$$

Así, la ecuación explícita de la recta deseada es de la forma,

$$y(x) = -6x + n, \tag{1}$$

donde n es el intercepto con el eje vertical. Como la recta es tangente a f en el punto $(1, f(1))$, sabemos que pasa por ese punto y que por tanto con la ecuación (1) se verifica:

$$(f(1) = y(1)) \implies (-3 = -6 \cdot 1 + n) \implies (n = 3).$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a f en $(1, f(1))$ viene dada por:

$$y(x) = -6x + 3.$$

- 3. Solución:** Definamos la función numerador $N(x) = f(x) + 2g(x)$ y la función denominador $D(x) = 3 - f(x) \cdot g(x)$. Se tiene que,

$$N(2) = 1 + 2 \cdot (-1) = -1, \quad (2)$$

$$D(2) = 3 - (1 \cdot (-1)) = 4. \quad (3)$$

Como f , g y las constantes son funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}$, sabemos que N y D son diferenciables, pues se obtienen mediante sumas, restas y producto de funciones diferenciables. Con las reglas correspondientes, sabemos que:

$$\begin{aligned} N'(2) &= f'(2) + 2g'(2), \\ &= -2 + 2 \cdot 4, \\ &= 6. \end{aligned} \quad (4)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} D'(2) &= 3' - (f'(2)g(2) + f(2)g'(2)), \\ &= 0 - ((-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 4), \\ &= -6. \end{aligned} \quad (5)$$

Como N y D son diferenciables en todo $\mathbb{R}$, también son diferenciables en $x = 2$. Además $D(2) \neq 0$, así que con todo esto se tiene que F es diferenciable en $x = 2$ y su derivada en dicho punto viene dada por:

$$F'(2) = \frac{N'(2)D(2) - N(2)D'(2)}{(D(2))^2}. \quad (6)$$

Con las ecuaciones (2), (3) (4) y (5) en (6), tenemos:

$$\begin{aligned} F'(2) &= \frac{6 \cdot 4 - ((-1) \cdot (-6))}{16}, \\ &= \frac{18}{16}, \\ &= \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

4. a) $h(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)}.$

Solución: Notemos que $A(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$ y $B(x) = x^2 + x + 1$ son ambas funciones diferenciables pues todas las funciones polinómicas son diferenciables. Además, $x^2 + x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Con esto, podemos aplicar la derivada del cociente:

$$h'(x) = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{(B(x))^2}. \quad (7)$$

Calculamos $A'(x)$,

$$A'(x) = [(x+1)(x-1)]' = [x^2 - 1]' = 2x,$$

luego, $B'(x)$,

$$B'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1,$$

Con esto en (7),

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2x(x^2 + x + 1) - (x^2 - 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}, \\ &= \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - (2x^3 + x^2 - 2x - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}, \\ &= \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$$b) \quad k(x) = \frac{x^4 + 7x^3 - 2}{(x+1)} + \frac{(x^2 - 1)}{(2x+1)}.$$

Solución: Se tiene que,

$$f_1(x) = \frac{x^4 + 7x^3 - 2}{(x+1)},$$

es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ a excepción de $x = -1$ pues es cociente de funciones polinomiales y estas son siempre diferenciables a excepción de los puntos en que el denominador sea nulo. Así, con la derivada del cociente se tiene,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{(x^4 + 7x^3 - 2)'(x+1) - (x^4 + 7x^3 - 2)(x+1)'}{(x+1)^2}, \\ &= \frac{(4x^3 + 21x^2)(x+1) - (x^4 + 7x^3 - 2) \cdot 1}{(x+1)^2}, \\ &= \frac{4x^4 + 25x^3 + 21x^2 - x^4 - 7x^3 + 2}{(x+1)^2}, \\ &= \frac{3x^4 + 18x^3 + 21x^2 - 2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$f_2(x) = \frac{x^2 - 1}{(2x+1)},$$

es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ excepto $x = -1/2$ y su derivada viene dada por,

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{(x^2 - 1)'(2x+1) - (x^2 - 1)(2x+1)'}{(2x+1)^2}, \\ &= \frac{2x(2x+1) - (x^2 - 1) \cdot 2}{(2x+1)^2}, \\ &= \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 + 2}{(2x+1)^2}, \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2}{(2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Luego, $k(t)$ es diferenciable en $\mathbb{R}/\{-1, -1/2\}$ y su derivada en dicho conjunto viene dada por:

$$\begin{aligned} k'(x) &= f_1'(x) + f_2'(x), \\ &= \frac{3x^4 + 18x^3 + 21x^2 - 2}{(x+1)^2} + \frac{2x^2 + 2x + 2}{(2x+1)^2}. \end{aligned}$$

*