Programa de Bachillerato
Matemáticas 2, curso B

Resolución Ayudantía N° 1

Ayudante: Maximiliano Aravena Salcedo.

11 de agosto de 2023 Tiempo: 90 minutos.

---

1. Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-4x-6}{8x+8}$

Solución: Evaluando los polinomios $p(x) = 2x^2 - 4x - 6$ del numerador y $q(x) = 8x + x$ del denominador en $x = -1$ observamos que $p(-1) = 0$ y $q(-1) = 0$. Con el teorema del factor tenemos entonces que ambos polinomios son divisibles por $(x + 1)$.

Sabemos que $q(x) = 8x + 8 = 8(x + 1)$. Por otro lado, dividiendo $p(x)$ en $(x + 1)$ se obtiene,

$$\begin{array}{rl}
\big(\quad 2x^2 - 4x - 6\big) \div \big(x+1\big) = 2x - 6 & \\
\underline{-\,2x^2 - 2x\phantom{{}-6}} & \\
-\,6x - 6 & \\
\underline{6x + 6} & \\
0 &
\end{array}$$

así que $p(x) = (2x - 6)(x + 1) + 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-4x-6}{8x+8} &= \lim_{x\to -1} \frac{(2x-6)(x+1)}{8(x+1)}, \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{2x-6}{8}, \\
&= \frac{-8}{8}, \\
&= -1.
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^7-4x^3}{7x^5+3x^2}$

Solución: Simplificamos la expresión con la potencia de x de mayor grado:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^7-4x^3}{7x^5+3x^2} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^7(2-4/x^4)}{x^7(7/x^2+3/x^5)}, \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{(2-4/x^4)}{(7/x^2+3/x^5)}.
\end{aligned}$$

Por definición tenemos que,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(1/x),$$

así que se presenta la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{(2-4/x^4)}{(7/x^2+3/x^5)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(2-4x^4)}{(7x^2+3x^5)}, \\
&= \lim_{x\to 0^+} (2-4x^4) \cdot \frac{1}{(7x^2+3x^5)}.
\end{aligned}$$

Donde,

$$\lim_{x\to 0^+} (2-4x^4) = 2 > 0,$$

y
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(7x^2+3x^5)} = +\infty.$$
Por lo que recordando la siguiente proposición,
$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = L > 0 \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty\right) \implies \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty,$$
tenemos que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^7-4x^3}{7x^5+3x^2} = \lim_{x\to 0^+} (2-4x^4)\cdot\frac{1}{(7x^2+3x^5)} = +\infty.$$

c) $\displaystyle\lim_{t\to 3^-} \frac{|t-3|-6}{t+3}$

Solución: Si t tiende a 3 por la izquierda, entonces $(t-3)<0$. Luego, por definición de valor absoluto, cuando $t\to 3^-$ se tiene $|t-3| = -(t-3)$. Con esto,
$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 3^-} \frac{|t-3|-6}{t+3} &= \lim_{t\to 3^-} \frac{-(t-3)-6}{t+3},\\
&= \lim_{t\to 3^-} \frac{-t-3}{t+3},\\
&= \lim_{t\to 3^-} -1,\\
&= -1.
\end{aligned}$$

2. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$

Solución: Tenemos una expresión con resta de raíces, así que lo más conveniente es racionalizar. Dejamos al pie de página[1] dos resultados conocidos previamente que serán útiles en esta solución.
$$\begin{aligned}
\frac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}} &= \frac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}},\\
&= \frac{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x})^2-(\sqrt{4-x})^2},\\
&= \frac{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(4+x)-(4-x)},\\
&= \frac{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{2x},\\
&= 2(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}).
\end{aligned}$$
Con esto,
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}} &= \lim_{x\to 0} 2(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}),\\
&= 8.
\end{aligned}$$
Por lo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 8$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)$

Solución: Recordando la siguiente proposición:
$$\left(\lim_{x\to x_0} A(x) = L < 0 \wedge \lim_{x\to x_0} B(x) = +\infty\right) \implies \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty.$$
Y notando que,
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(3x^4-4)\cdot\frac{1}{5x^4+2x^2}.$$
donde, $\lim_{x\to 0}(3x^4-4) = -4$ y $\lim_{x\to 0}(1/(5x^4+2x^2) = +\infty$, tenemos que
$$\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$$

[1] $\sqrt{x^2} = |x|$ y $\sqrt{x}^2 = x$.

c) $\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))$

Solución: Recordando la siguiente proposición:

$$\left(\lim_{x\to x_0} A(x) = L > 0 \wedge \lim_{x\to x_0} B(x) = -\infty\right) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty.$$

Tenemos que

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty,$$

porque $\lim_{x\to 0} f(x) = 8 > 0$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

d) $\lim_{x\to 0}(f(x) + x^2 g(x))$

Solución: Con álgebra de límites,

$$\lim_{x\to 0}(f(x) + x^2 g(x)) = \lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} x^2 g(x).$$

Siempre y cuando exista cada límite por separado. Sabemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 8$, así que corresponde revisar $\lim_{x\to 0} x^2 g(x)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(x^2 g(x)) &= \lim_{x\to 0}\left(x^2 \frac{3x^4-4}{5x^4+2x^2}\right), \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^4-4}{5x^2+2}\right), \\
&= \frac{-4}{2}, \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0}(f(x) + x^2 g(x)) = 8 - 2 = 6.$$

3. *a*) **Demostración:** Con la definición de continuidad en un punto, f es continua en $x = 2$ si se cumplen las siguientes condiciones simultaneamente:

1) $2 \in \mathrm{Dom}(f)$. Ó sea, $f(2) \in \mathbb{R}$.
2) $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe.
3) $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

La condición 1) está asegurada por la regla de asignación de f.

$$f(2) = 1/12.$$

La condición 2) exige la existencia e igualdad de los límites laterales. Veamos:

- Por la izquierda: Primero dividiremos el polinomio del denominador por $(x-2)$, pues 2 es raíz del polinomio y nos interesa factorizar.

$$\begin{array}{rl}
(\quad 2x^2 - 5x + 2) \div (x-2) = 2x - 1 & \\
\underline{-\,2x^2 + 4x\quad\;} & \\
-\,x + 2 & \\
\underline{x - 2} & \\
0 &
\end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2-5x+2},\\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2})-2}{(x-2)(2x-1)},\\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2})-2}{(x-2)(2x-1)} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2},\\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}^2-2^2}{(x-2)(2x-1)(\sqrt{x+2}+2)},\\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(2x-1)(\sqrt{x+2}+2)},\\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(2x-1)(\sqrt{x+2}+2)},\\
&= \lim_{x\to 2} \frac{1}{(2x-1)(\sqrt{x+2}+2)},\\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

- Por la derecha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+10},\\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Con la igualdad de los límites laterales tenemos que la condición 2) se se cumple y

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1/12$$

. Luego, es inmediato que la condición 3) se cumple:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1/12.$$

Cumpliéndose las 3 condiciones, la función f es continua en $x = 2$. ■

b) **Solución:** Todos los polinomios son continuos en todo $\mathbb{R}$, mientras que los cocientes entre polinomios son continuos en todo $\mathbb{R}$ a excepción de las raíces del denominador cuando el cociente está en su forma irreductible. Por ello podemos asegurar la continuidad de $g(x)$ en todos su dominio a excepción de los puntos en que cambia de regla de asignación. Ó sea, $x = -3$ y $x = 2$.

Para que $g(x)$ sea continua en esos valores debemos fijar a y b que lo permitan, eso es, que se cumplan las dos siguientes condiciones simultáneamente:

1) $\lim_{x\to -3^-} g(x) = \lim_{x\to -3^+} g(x) = -3a + b$.
2) $\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^-} g(x) = 2a + b$.

- Condición 1) Determinemos el límite por la izquierda,

$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Luego, para que se cumpla la igualdad de límites laterales se tiene que,

$$0 = -3a + b. \tag{1}$$

- Condición 2) Determinemos el límite por la derecha,

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{x-2}.$$

Realizando la correspondiente división de polinomios,

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 3x^2 + 2x\big) \div \big(x-2\big) = x^2 - x\\
\underline{-x^3 + 2x^2}\\
\qquad -x^2 + 2x\\
\qquad\;\; \underline{x^2 - 2x}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} g(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{x-2}, \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x)(x-2)}{x-2}, \\
&= \lim_{x\to 2}(x^2-x), \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Entonces, para que se cumpla la igualdad de polinomios se requiere,

$$2 = 2a + b. \tag{2}$$

Luego, con el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) tenemos que $a = 0{,}4$ y $b = 1{,}2$ permiten que la función g sea continua en todo su dominio.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x+2} & si \quad x < -3 \\[2ex] 0{,}4x + 1{,}2 & si \quad -3 \leq x \leq 2 \\[2ex] \dfrac{x^3-3x^2+2x}{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

*