Pauta Control 5 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Jueves 15 de junio, 2023

Instrucciones:

- **Disponen desde las 12:00 hasta las 12:30 h para el desarrollo del control.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Es individual.**
- **Debe responder <u>sólo uno</u> de los dos problemas que se presentan.**
- **Nombre:**

Problemas Propuestos

1. Considera las funciones $f\colon \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}$ y $g\colon]0,\ +\infty[\to \mathbb{R}$, cuyas reglas de asignación están dadas por:

$$f(x) = \frac{1}{2-x} - 1 \qquad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Considerar la función $h = g \circ f$.

a) Determine el dominio de h. [**3 puntos**]

Solución: En primer lugar,

$$\mathrm{Dom}(h) = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid f(x) = \frac{1}{2-x} - 1 \in]0, \infty[\right\}.$$

1 punto

Por otro parte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-x} - 1 \in]0,\infty[\qquad &\iff \qquad \frac{1-2+x}{2-x} > 0 \\ &\iff \qquad \frac{x-1}{x-2} < 0\,. \end{aligned}$$

	$x \in]-\infty, 1[$	$x = 1$	$x \in]1, 2[$	$x = 2$	$x \in]2, \infty[$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x-1}{x-2}$	$+$	0	$-$	no existe	$+$

1 punto

Por lo tanto,

$$f(x) \in]0, \infty[\qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in]1, 2[\,.$$

Así,

$$\mathrm{Dom}(h) = (\mathbb{R} - \{2\}) \cap]1, 2[=]1, 2[\,.$$

1 punto

b) Determine la regla de asignación de h. [**2 puntos**]

Solución:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{2-x} - 1\right) = \frac{2-x}{x-1}\,.$$

1 punto

Por lo tanto, $h\colon]1, 2[\to \mathbb{R}$ y su regla de asignación es

$$h(x) = \frac{2-x}{x-1}\,.$$

1 punto

c) ¿Es 0 un elemento del conjunto imagen de h? [**1 punto**]

Solución: Notemos que,

$$h(x) = \frac{-1+2+1-x}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 1\,.$$

Luego, para $x \in]1, 2[$:

$$\begin{aligned} 1 < x < 2 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 0 < x - 1 < 1 \qquad /()^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \qquad 1 < \frac{1}{x-1} \qquad / - 1 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 0 < \frac{1}{x-1} - 1 = h(x)\,. \end{aligned}$$

0,7 puntos

Por lo tanto,

$$\mathrm{Im}(h) =]0, \infty[$$

Por lo cual, $0 \notin \mathrm{Im}(h)$.

0,3 puntos

Nota: Si justifica el conjunto imagen de h mediante el gráfico también se considera correcto.

2. Considera la función $h\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{3x-4}{x-1}$

a) Exprese h en su forma canónica y esboce su gráfica indicando cortes con los ejes y sus asíntotas, si es que existen. [**2 puntos**]

Solución: En primer lugar, dividiendo polinomios, se tiene,

$$3x - 4 = 3(x-1) + (-1)\,.$$

Por lo cual

$$h(x) = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{3(x-1)-1}{x-1} = 3 - \frac{1}{x-1} = M + \frac{k}{x-h}$$

Así, $M = 3$, $k = -1$ y $h = 1$

1 punto

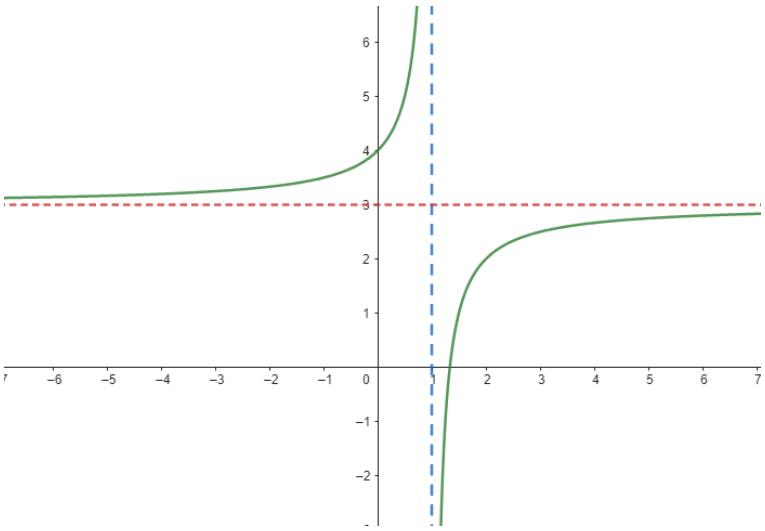
Además,

$$h(0) = 4 \qquad \text{y} \qquad h(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{4}{3}\,.$$

Ahora, dado que $k = -1 < 0$, luego h es creciente en $]-\infty, 1[$ y en $]1, \infty[$. La recta $x = 1$ es una asíntota vertical y la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal de h.

0,5 puntos

Por lo cual su gráfica es:



0,5 puntos

b) Usando el gráfico de h muestre que tal función es inyectiva, pero no es epiyectiva. Redefína la función anterior y llámela $\hat{h}$, conservando el dominio pero modificando su codominio para que sea biyectiva. [**2 puntos**]

Solución: Observando el gráfico de h se desprende que

$$\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R} - \{3\},$$

luego, cada $y \in \mathrm{Im}(h)$ posee un único $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Por lo tanto, h es una función inyectiva.

0,5 puntos

Además,

$$\mathrm{cod}(h) = \mathbb{R} \neq \mathbb{R} - \{3\} = \mathrm{Im}(h).$$

Por lo cual, h no es una función sobreyectiva.

0,5 puntos

Redefiniendo h como $\hat{h}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{h}\colon \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{3\} \\ x &\longmapsto 3 - \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

es biyectiva.

1 punto

c) Usando el ítem anterior, determine la función inversa de $\hat{h}$ y grafíquela. [**1,5 puntos**]

Solución: Considere

$$\hat{h}^{-1}\colon \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}.$$

0,2 puntos

Ahora, buscamos su regla de asignación

$$\begin{aligned} y = 3 - \frac{1}{x-1} \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 3 - y = \frac{1}{x-1} \\ &\Longleftrightarrow \qquad \frac{-1}{y-3} = x - 1 \\ &\Longleftrightarrow \qquad x = 1 + \frac{-1}{y-3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

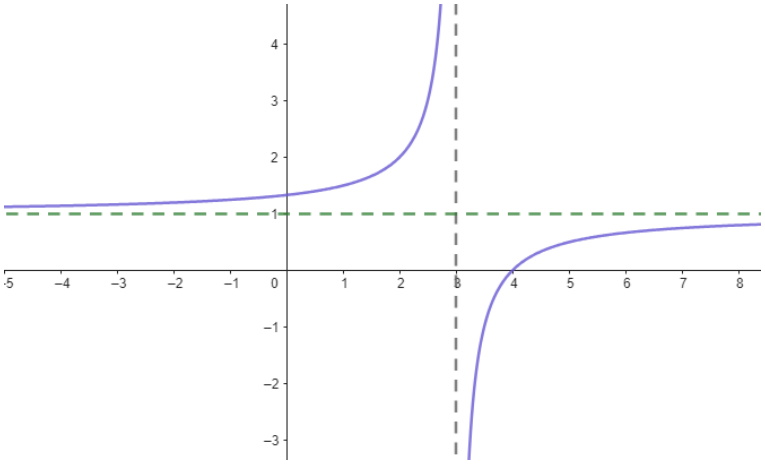
$$\hat{h}^{-1}(x) = 1 + \frac{-1}{x-3}.$$

0,3 puntos

Así, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal y la recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Además, $k = -1 < 0$, por lo cual, $\hat{h}$ es creciente en cada intervalo $]-\infty, 3[$ y $]3, +\infty[$

0,5 puntos

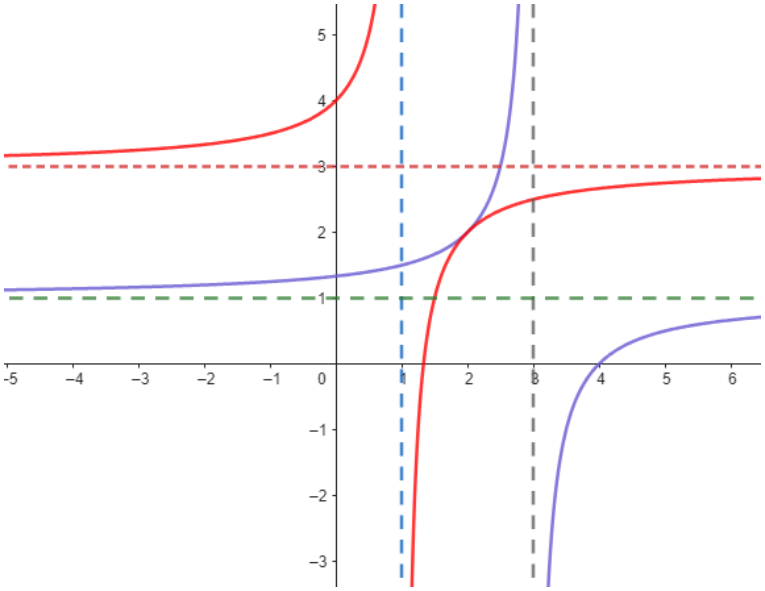
y su gráfica está dada por



0,5 puntos

d) Utilizando el gráfico de la función $\hat{h}$ y su inversa, ¿para cuántos valores x se cumple que $\hat{h}(x) = \hat{h}^{-1}(x)$? [**0,5 puntos**]

Solución:



Se observa que las gráficas de $\hat{h}$ y $\hat{h}^{-1}$ se intersectan en los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\hat{h}(x) = \hat{h}^{-1}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{-1}{x-1} = 1 + \frac{-1}{x-3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2\,.$$

Por lo tanto, las gráficas se intersectan en $x = 2$.

0,5 puntos