

Pa) considere la función

$$f: \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [-2, 4]$$

$$f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1.$$

a) muestre que $\text{Im}(f) = [-2, 4]$

Sol: vemos que el periodo de la función viene dado

Por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

y el dominio es un intervalo de largo $\frac{3\pi}{2} > \pi$.

Por lo que en este dominio se cubre más de un ciclo de la función. Notamos además que

$$f(x) = 3 \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$$

por lo que identificamos los parámetros

$$A = 3 \quad | \quad \omega = 2 \quad | \quad h = -\frac{\pi}{4} \quad | \quad k = 1.$$

Así, la imagen viene dada por

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= [k - |A|, k + |A|] = [1 - 3, 1 + 3] \\ &= [-2, 4]. \end{aligned}$$

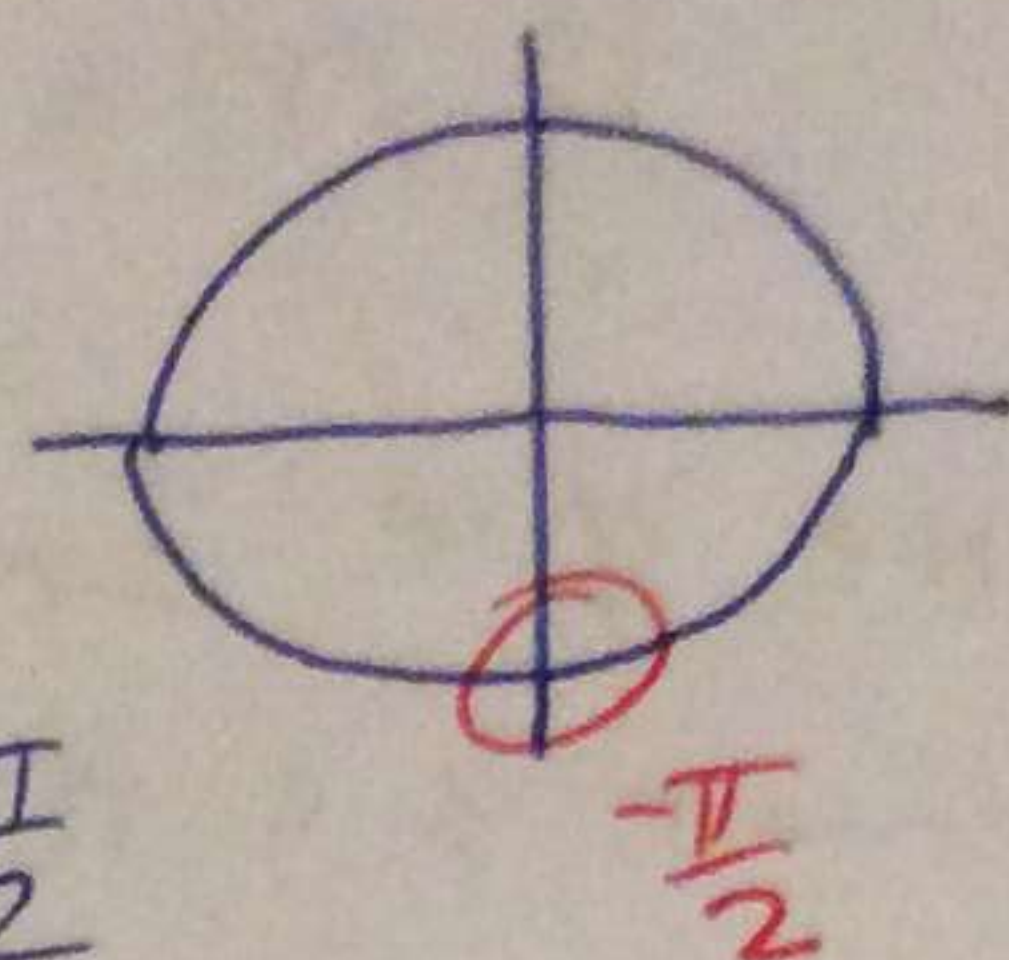
b) Resolver

(2)

$$1) f(x) = -2$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$



$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \quad | -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\pi + 2k\pi \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k\pi$$

Debemos escoger $k \in \mathbb{Z}$ para que $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{-\pi}{2} + k\pi \leq \frac{3\pi}{2} \quad | \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{1}{2} + k \leq \frac{3}{2} \quad | + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k \leq 2 \rightarrow \boxed{k = 1, 2}$$

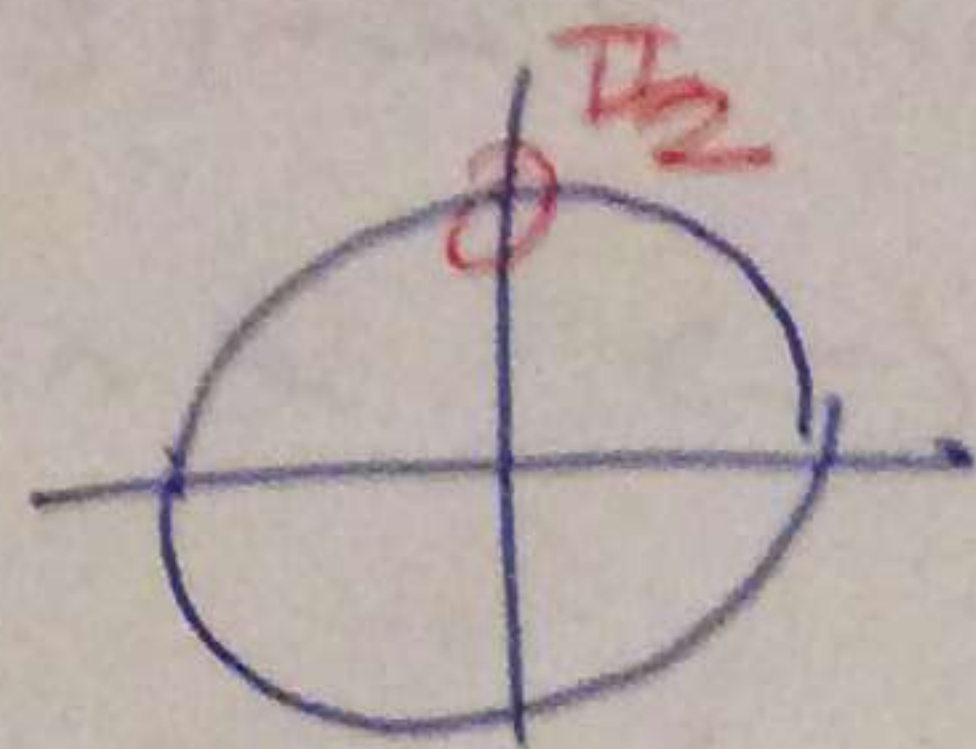
Así, obtenemos las soluciones

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \quad | \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

o) $f(x) = 4$

$$\Leftrightarrow 3 \sin(2x + \frac{\pi}{2}) + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 1$$



$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi \Leftrightarrow x = k\pi$$

Debemos escoger $k \in \mathbb{Z}$ para que $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$.

$$\Leftrightarrow 0 \leq k\pi \leq \frac{3\pi}{2} \quad | \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{k = 0, 1.}$$

Así, obtenemos las soluciones

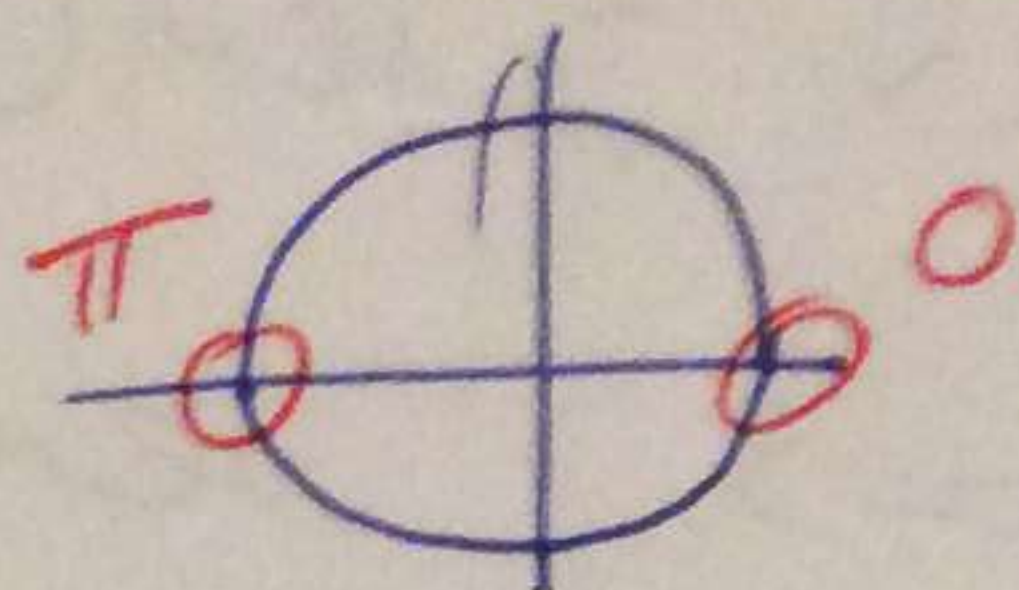
$$x_1 = 0 \mid x_2 = \pi.$$

o) $f(x) = 1$

(4)

$$\Leftrightarrow 3 \operatorname{Re}m\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}m\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$



$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{2} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{2} = k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Debemos encontrar $k \in \mathbb{Z}$ para que $x \in [0, 3\frac{\pi}{2}]$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \quad | + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq k\frac{\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{7}{2}$$

$\cdot 2$

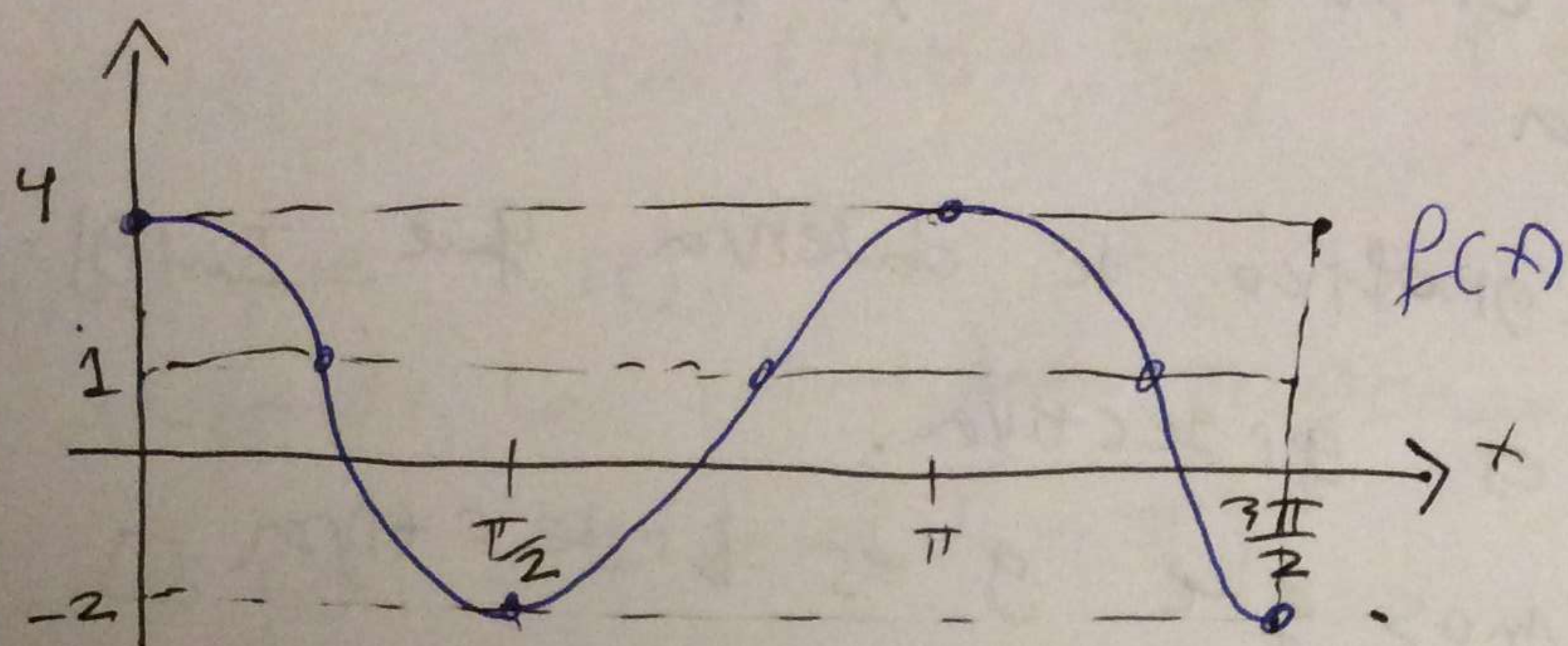
$$\rightarrow \boxed{k = 1, 2, 3}$$

Así, obtenemos las soluciones

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad | \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} \quad | \quad x_3 = \frac{5\pi}{4}$$

c) grafique f .

Sol. De los datos obtenidos en b), obtenemos el sgte grafico:



d) Determine los intervalos de monotonía de f .
Sol. Del grafico, vemos que

•) f es creciente en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

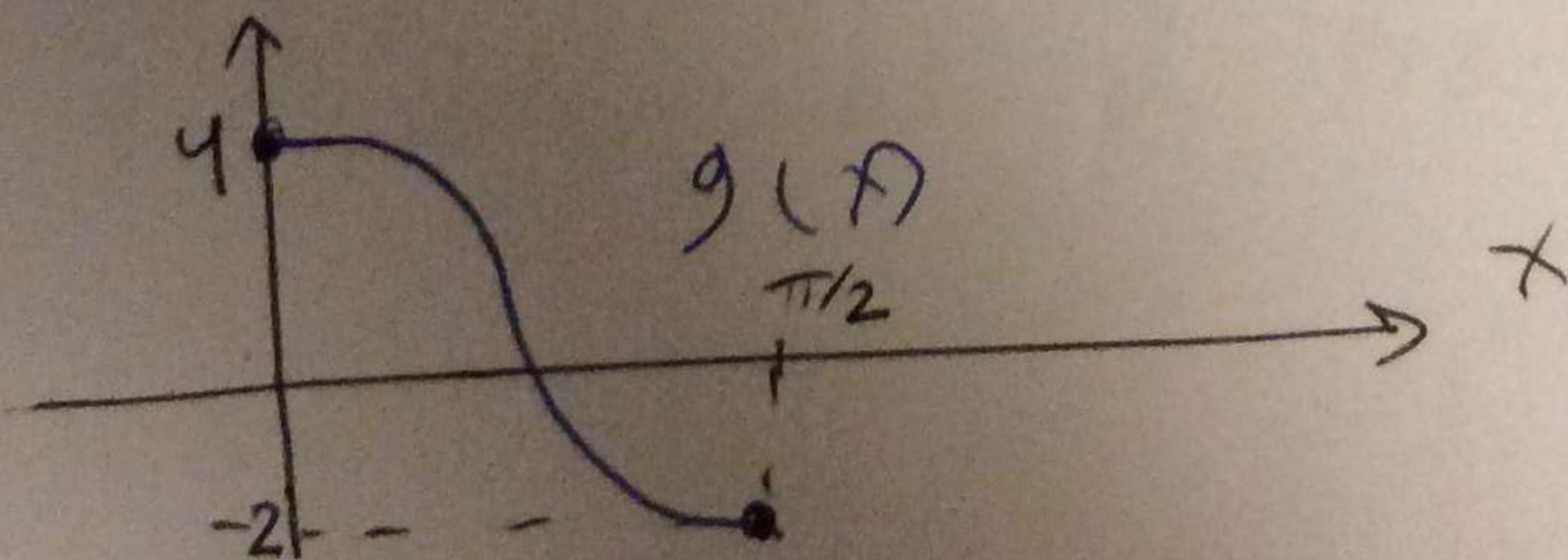
•) f es decreciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

e) Se define $g: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-2, 4]$ por

$$g(x) = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{2}) + 1 = f(x)$$

¿es g biyectiva?

Sol. veamos el grafico de g .



Vemos de este gráfico que
para cada $y \in [-2, 4]$, existe a lo más un
 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $g(x) = y$ (cosa que no
pasa para f en su dominio). Por lo que g
es inyectiva. ⑥

Además, del gráfico se observa que $\text{Im}(g) = [-2, 4]$,
por lo que g es suryectiva.

Así, concluimos que g es biyectiva $\square$.

P2] t : tiempo [s]

(7)

$x(t)$: posición de la partícula en el tiempo t .
[cm]

$$x(t) = 5 \cos\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad t \in [0, 10]$$

a) grafique $x(t)$.

SOL: utilizando la identidad trigonométrica:

$$\cos(\alpha) = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Vemos que

$$x(t) = 5 \cos\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -5 \sin\left(\pi t + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -5 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

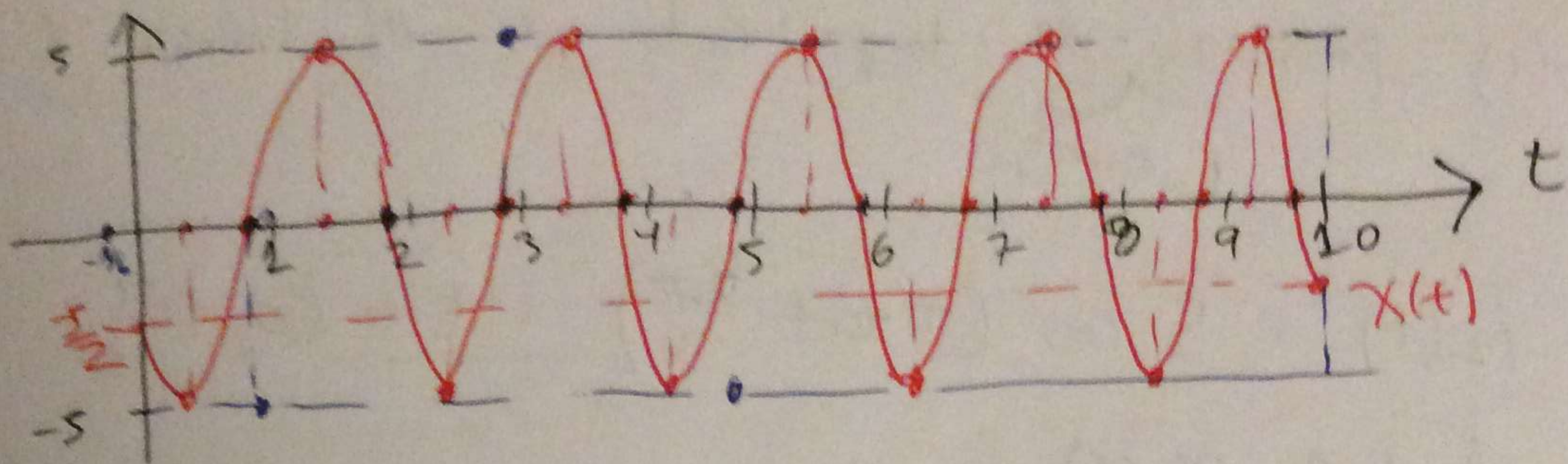
$$= -5 \sin\left(\pi\left(t + \frac{1}{6}\right)\right)$$

Por lo que identificamos los parámetros:

$$A = -5 \mid \omega = \pi \mid h = \frac{1}{6} \mid k = 0$$

$$\text{Por lo que } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

De modo que obtenemos el siguiente gráfico:



En que

$$x(0) = -5 \sin(\pi/6) = -\frac{5}{2}$$

$$y) x(10) = x(0) = -\frac{5}{2}$$

↳ por que el periodo es 2.

b) Instantes en los que pasa por el centro de oscilación.

Sol: Debemos resolver

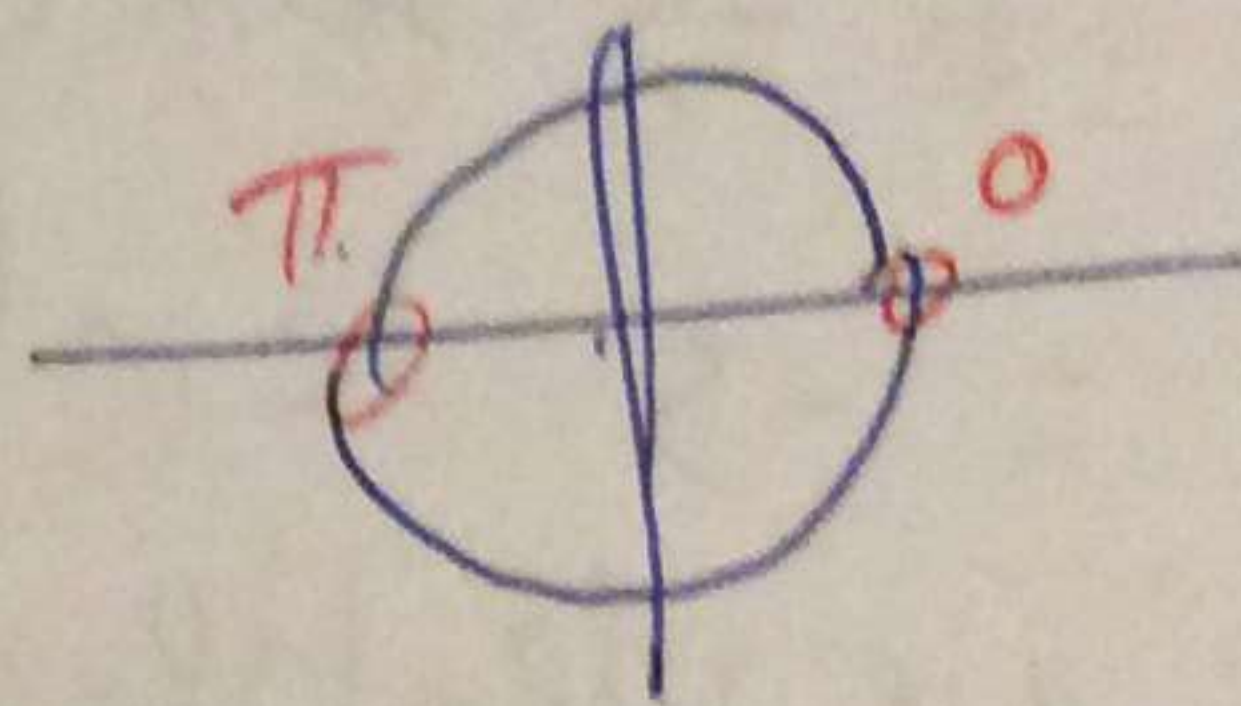
$$x(t) = 0$$

$$\Rightarrow -5 \sin(\pi(t + \frac{1}{6})) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\pi(t + \frac{1}{6})) = 0$$

$$\Rightarrow \pi(t + \frac{1}{6}) = k\pi$$

$$\Rightarrow t = k - \frac{1}{6}$$



y los $k \in \mathbb{Z}$ tales que $t \in [0, 10]$ son

$k = 1, \dots, 10$, por lo que obtenemos:

$$t = \frac{5}{6}, \frac{11}{6}, \frac{17}{6}, \frac{23}{6}, \frac{29}{6}, \frac{35}{6}, \frac{41}{6}, \frac{47}{6}, \frac{53}{6}, \frac{59}{6}$$

P3) Analice si los sgtes límites existen.
En caso de existir, determine su valor.

(9)

Sol:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2x+2} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{2}x} \cdot \frac{(\sqrt{-2x+2} + \sqrt{x+2})}{(\sqrt{-2x+2} + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-2x+2) - (x+2)}{\sqrt{2}x(\sqrt{-2x+2} + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{\sqrt{2}x(\sqrt{-2x+2} + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3/\sqrt{2}}{\sqrt{-2x+2} + \sqrt{x+2}} = \frac{-3}{4}$$

$\rightarrow 2\sqrt{2} \neq 0$

Por lo que el límite existe y vale $-\frac{3}{4}$.

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 3)(x-1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x-3} = \frac{2}{2} = 1$$

$\rightarrow 2 \neq 0$

Por lo que el límite existe y vale 1.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x-1) = x^2 - 2x + 3 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -2x^2 + 5x - 3 \\ -(-2x^2 + 2x) \\ \hline 3x - 3 \\ -(3x - 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

10

ya factorizamos esto en la pregunta anterior.

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x + 3)(x - 1)}{(x - 3)(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\overbrace{(x^2 - 2x + 3)}^{20}}{\underbrace{x - 3}_{\rightarrow 0}}$$

Como el numerador es positivo y el denominador tiende a 0 cuando $x \rightarrow 3$, el límite no existe.

P41 $g: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \mid g(x) = \frac{2}{x+2}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+h+2} - \frac{2}{3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3+h} - \frac{2}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{6 - 2(3+h)}{3(3+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{\cancel{6} - \cancel{6} - 2h}{9 + 3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{9 + 3h} = \frac{-2}{9}$$

$\rightarrow 9 \neq 0$