P1] Considere $f: [-4,4] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = -2\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}x)+1$ (1)

Esbozar la gráfica de f con los puntos de intersección con los ejes

Sol: → Intersección con Y

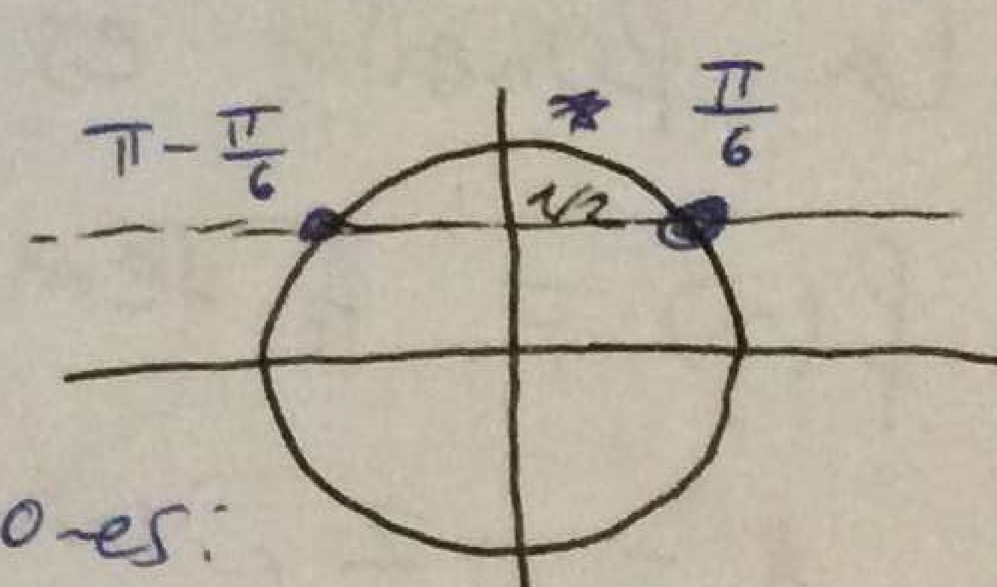
corresponde a $(0, f(0))$ en que $f(0) = -2\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot 0)+1$
$= 1.$

Por lo que f intersecta al eje Y en $(0,1)$.

→ Intersección con X.

Buscamos los $x \in [-4,4]$ tales que

$$f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow -2\,\text{sen}(\tfrac{\pi}{2}x) + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \text{sen}(\tfrac{\pi}{2}x) = \tfrac{1}{2}$$



esta ecuación posee dos tipos de soluciones:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{2}x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2(\frac{1}{6} + 2k) \\ x_2 = 2(\frac{5}{6} + 2k) \end{cases}$$

Buscamos ahora elegir los $k \in \mathbb{Z}$ para que $x_1, x_2 \in [-4,4]$

x_1] $-4 \leq x_1 \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq 2(\frac{1}{6} + 2k) \leq 4$

$\Leftrightarrow -2 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-13}{6} \leq 2k \leq \frac{11}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{-13}{12} \leq k \leq \frac{11}{12}$. como $k \in \mathbb{Z}$, esto nos deja las opciones $k=-1$ y $k=0$.

$\boxed{x_2}$

$$-4 \leq \frac{5}{3} + 4k \leq 4 \iff \frac{-17}{3} \leq 4k \leq \frac{7}{3}$$

$$\iff -\frac{17}{12} \leq k \leq \frac{7}{12}.$$ esto también deja solo las opciones $k=-1$ y $k=0$.

Por lo que las intersecciones con los ejes se producen en los puntos $(x, 0)$ con x alguno de los siguientes:

$$x_1 = \frac{-11}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{-7}{3}, \quad x_4 = \frac{5}{3}.$$

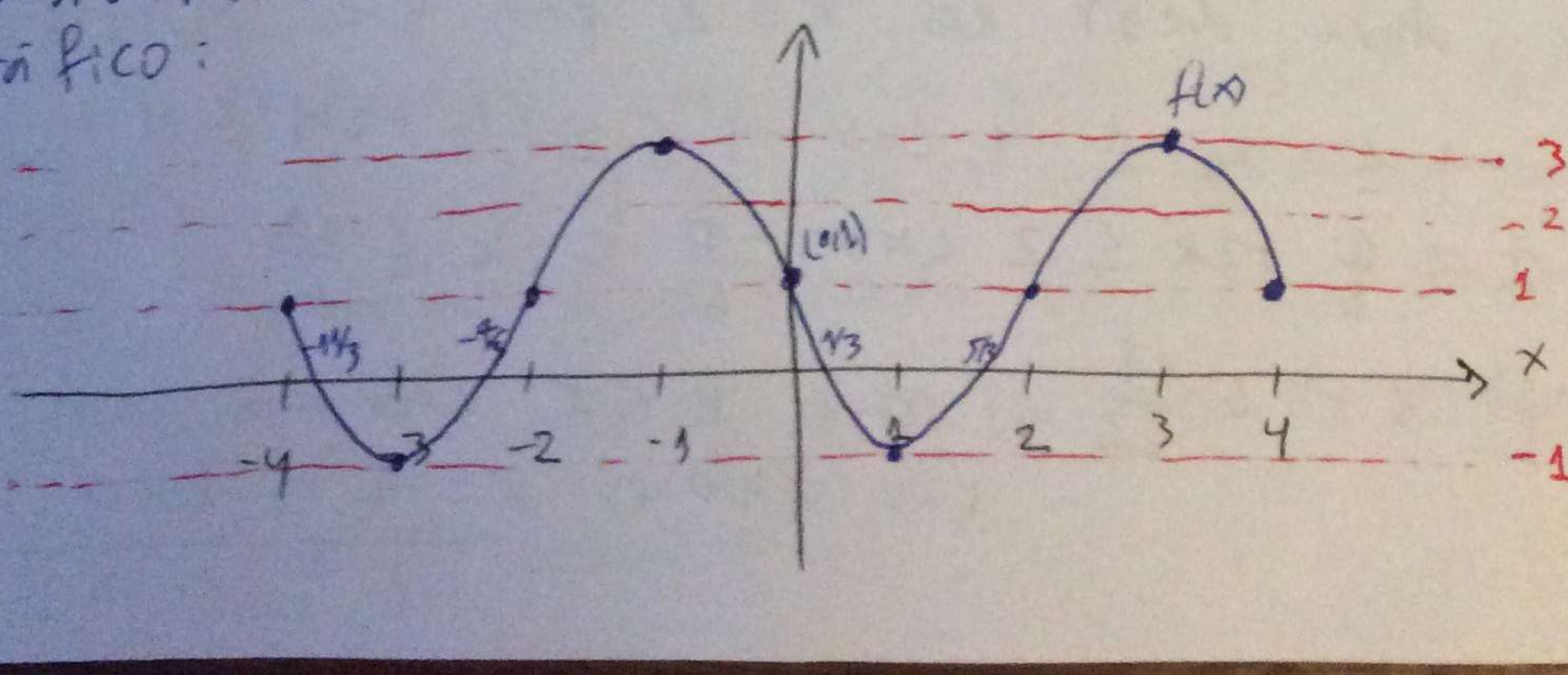
Ahora, para el gráfico, ~~calculamos el per~~ vemos que la función es del tipo

$$f(x) = A \operatorname{sen}(w(x-h)) + k$$

Para $A = -2$, $w = \frac{\pi}{2}$, $h=0$ y $k=1$, calculamos el periodo,

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 4.$$

considerando el resto de los parámetros, tenemos el siguiente gráfico:



En base al gráfico, vemos que

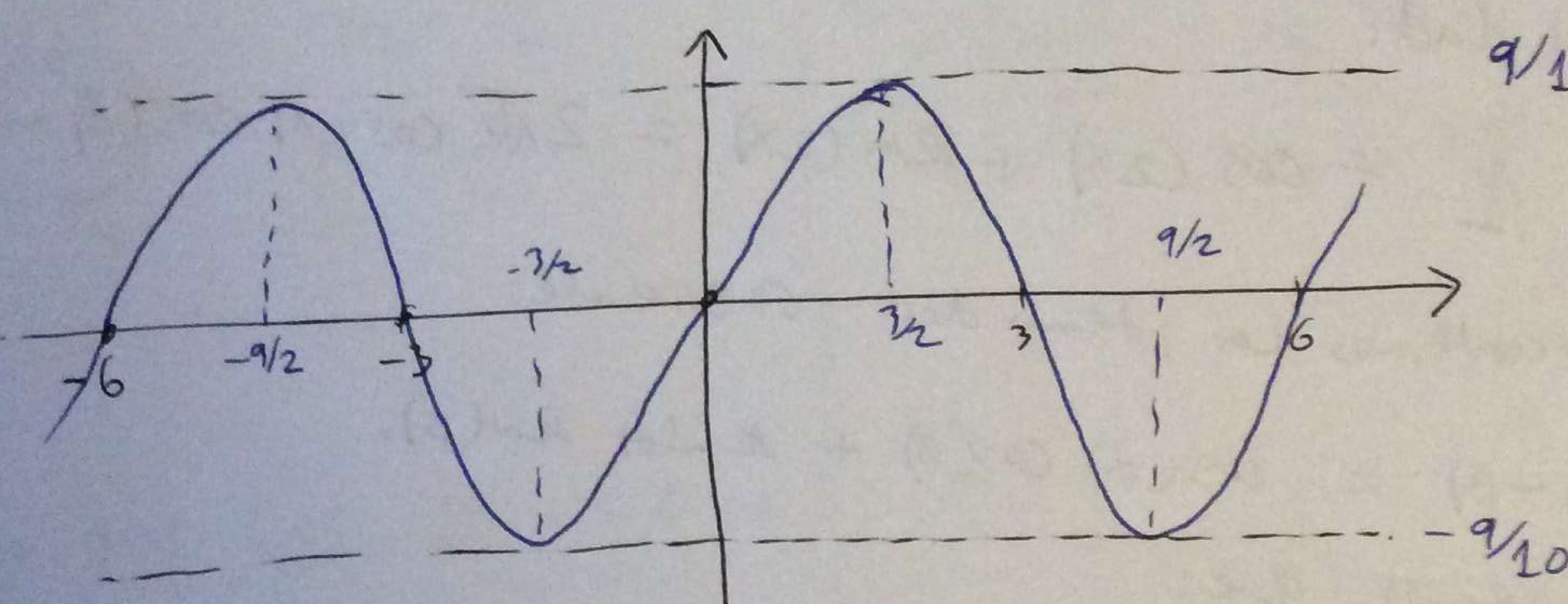
→ el máximo de f es 3, alcanzado en ~~1 y~~ $x=-1$ y $x = 3$.

→ El mínimo de f es -1, alcanzado en $x = 1$ y $x = -3$.

P2| ν: flujo de aire (Litros por segundo)

t: tiempo (segundos)

Tenemos el siguiente gráfico:



a) Regla de asignación.

Debemos encontrar una regla del tipo

$$\nu(t) = A \operatorname{sen}(\omega(t-h)) + k.$$

Como el modelo está centrado en $(0,0)$, podemos tomar $(h,k)=(0,0)$, además, la amplitud es de $9/10$ y como en $(0,0)$ $\nu(t)$ es creciente, podemos tomar $A = \frac{9}{10}$. Finalmente el periodo es de 6. Por lo que

$$6 = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{3}.$$ Así, la regla de asignación es:

$$\nu(t) = \frac{9}{10} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} t\right)$$

b) ¿Cuánto tiempo tarda un ciclo respiratorio completo?

Como vimos, el periodo es de 6. Por lo que un ciclo completo tarda 6 segundos.

c) ¿Cuál es el número de ciclos por minuto?

En un minuto, transcurren 10 ciclos.

P3) a) Demuestre que para $x \in \mathbb{R}$ se satisface la igualdad.

$$1 + \cos(2x) + \operatorname{sen}(2x) = 2\sqrt{2}\cos(x)\cos\left(\tfrac{\pi}{4} - x\right).$$

__Dem:__ Recordemos la identidad siguiente:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).$$

Con esto, vemos que:

$$2\sqrt{2}\cos(x)\cos\left(\tfrac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2}\cos(x)\Big(\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)}_{\sqrt{2}/2}\cos(x) + \underbrace{\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)}_{\sqrt{2}/2}\operatorname{sen}(x)\Big)$$

$$= 2\cos(x)\big(\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\big)$$

$$= \underbrace{2\cos(x)\operatorname{sen}(x)}_{} + 2\cos^2(x)$$

$$= \operatorname{sen}(2x) + 1 + \underbrace{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)}_{}$$

$$= 1 + \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) \quad \square$$

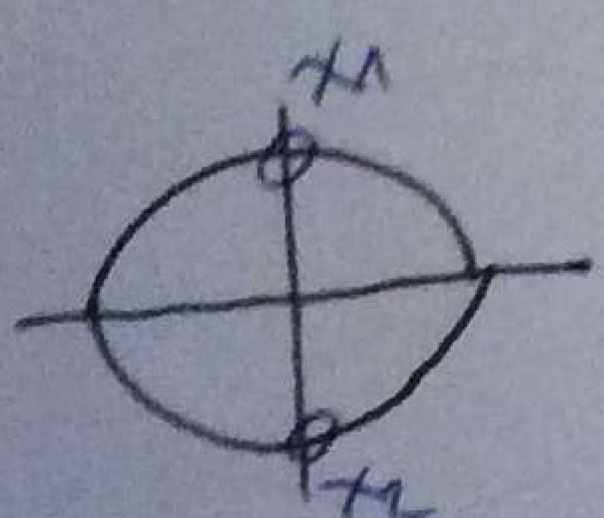
b) Encuentre $x \in [0, 2\pi]$ que cumplan (5)

$$2\,\text{sen}(x)\cos(x) = \sqrt{3}\cos(x)$$

$$\iff \cos(x)\left(2\,\text{sen}(x) - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Por lo que esta ecuacion se satisface solo si

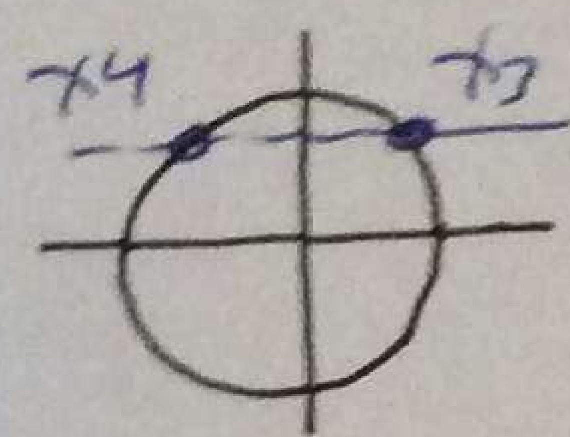
(1) $\cos(x) = 0$



$x_1 = \frac{\pi}{2}$

$x_2 = \frac{3\pi}{2}$

(2) $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$x_3 = \pi/3$

$x_4 = \frac{2\pi}{3}$

Por lo que las soluciones son

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}.$$