

Ayudantía 9:

①

P1) considere las funciones

$$i) f:]-\infty, a] \rightarrow [4, \infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$$

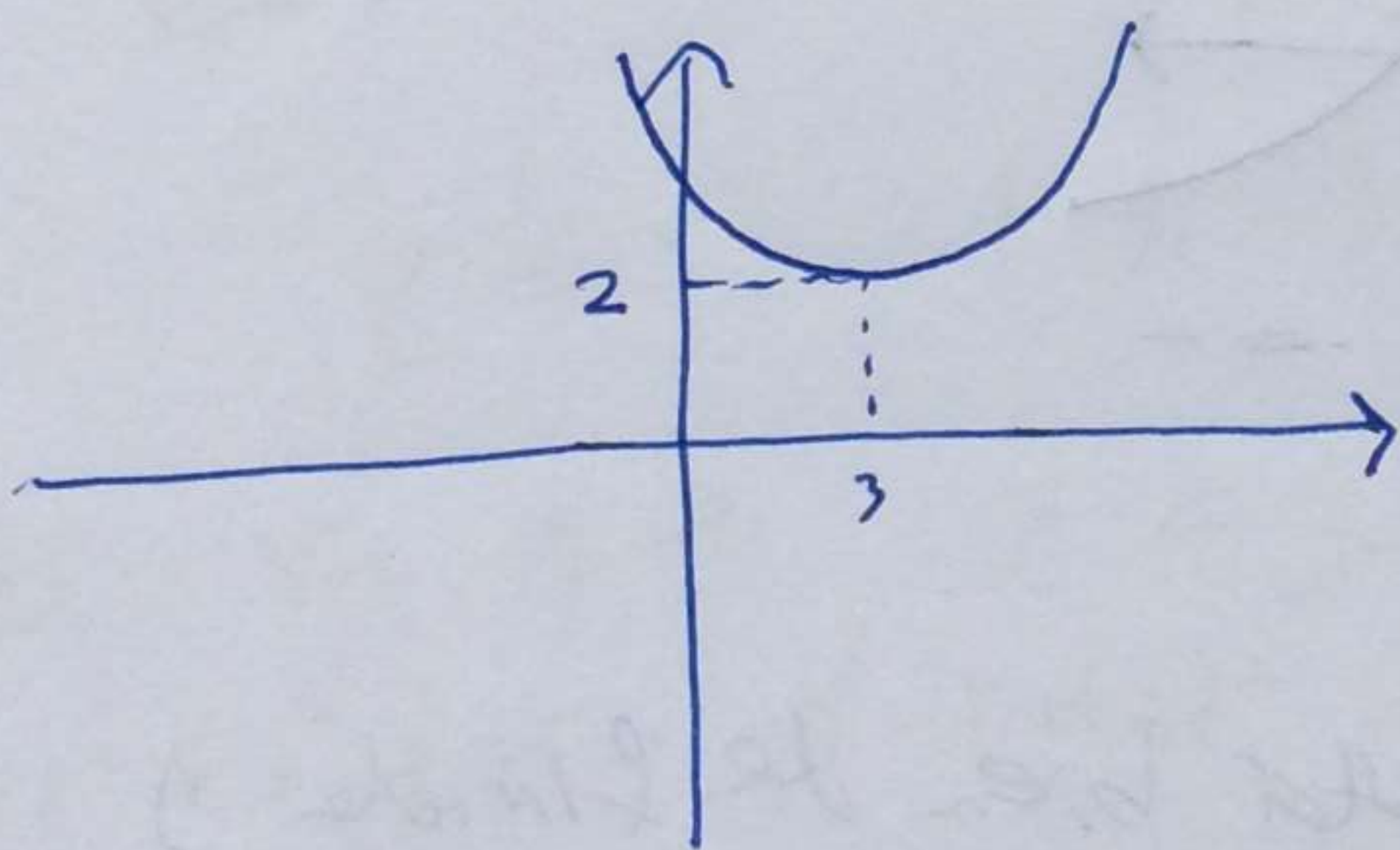
$$ii) g: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{b\}$$

$$g(x) = \frac{1}{x-2} - 4$$

a) Determine las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que f y g sean biyectivas. Justifique

Sol:

i) Graficamos f con dominio $\mathbb{R}$:



Si buscamos que el codominio sea $[4, \infty[$, para que la función esté bien definida, necesitamos encontrar aquel $a < 3$ t.q. $f(a) = 4$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-3)^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-3)^2 = 2$$

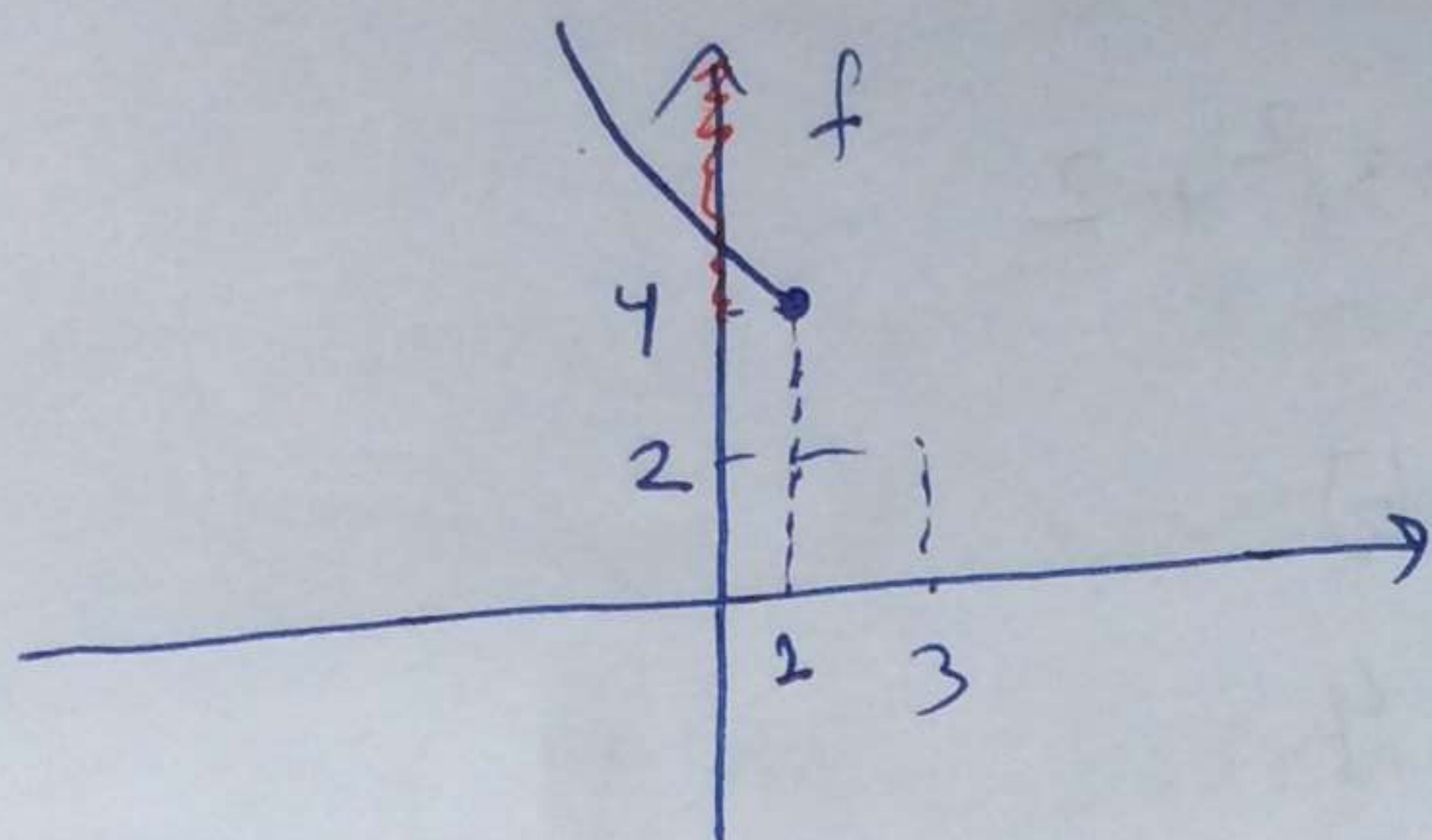
$$\Leftrightarrow (a-3)^2 = 4 \Leftrightarrow |a-3| = 2 \Leftrightarrow a-3 = \pm 2$$

$$\Leftrightarrow a = 3 \pm 2. \text{ Ya que buscamos } a < 3, \underline{a = 1}$$

Así, cualquier función $f:]-\infty, a] \rightarrow [4, \infty[$ (2)

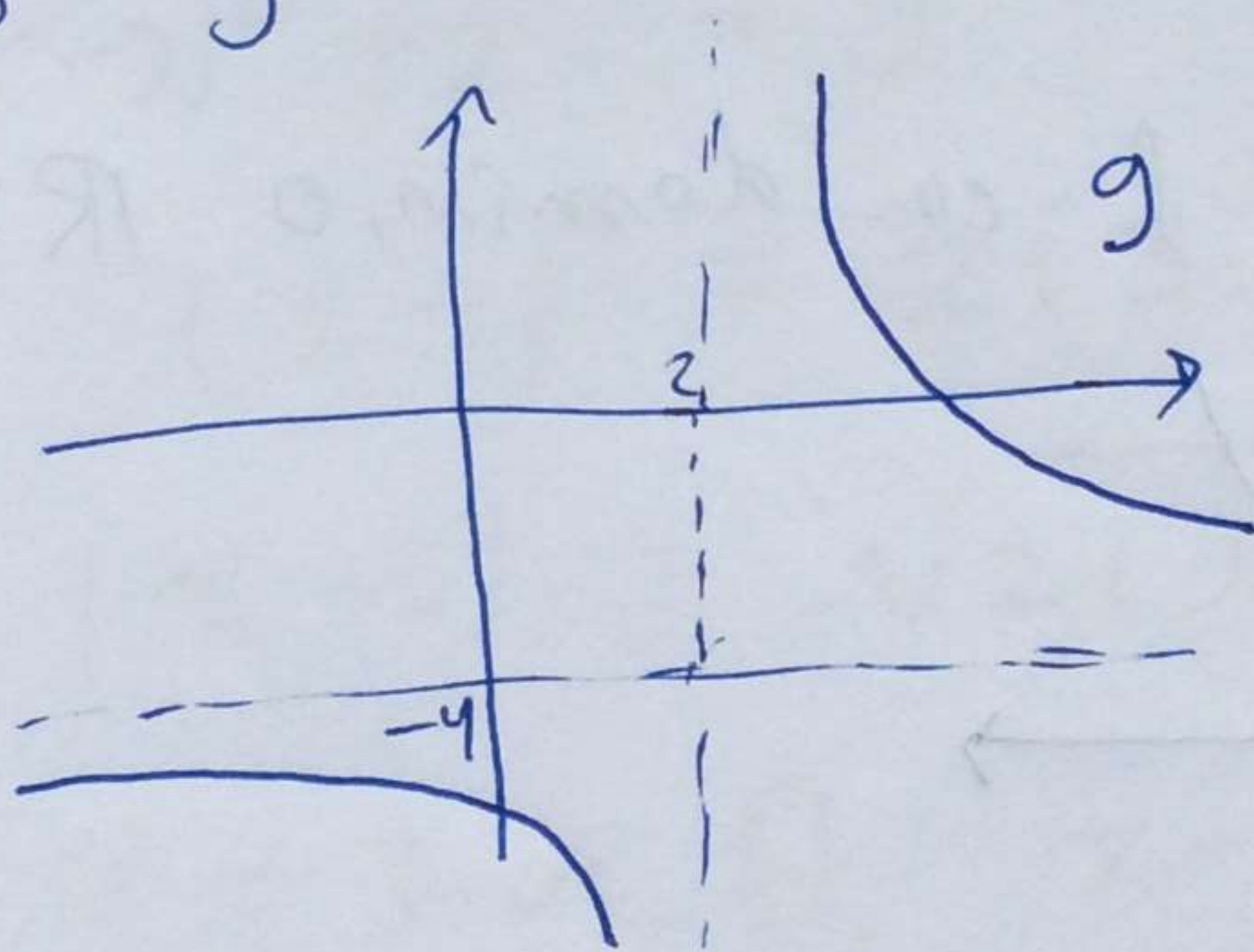
va a estar bien definida si $a \leq 1$.

Además, graficando para $a=1$,



venos que f es biyectiva ya que es inyectiva y alcanza todo su codominio.

ii) graficamos g



similarmemente, venos que g está bien definida y es biyectiva solamente para $b=-4$.

b) Encuentre las inversas.

(3)

Sol:
vernos que $f:]-\infty, 1] \rightarrow [4, \infty[$ viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$$

Por lo que despejamos como sigue.

~~Sea $x \in]-\infty, 1]$ e y~~

para $y \in [4, \infty[$, buscamos $x \in]-\infty, 1]$
tal que

$$f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 = y$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 2(y-2) \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow |x-3| = \sqrt{2(y-2)}$$

obs: ya que $x \in]-\infty, 1]$, $x-3 < 0$,
por lo que el valor absoluto se reemplaza como
sigue:

$$-(x-3) = \sqrt{2(y-2)}$$

$$x = 3 - \sqrt{2(y-2)}$$

Por lo que $f^{-1}: [4, \infty[\rightarrow]-\infty, 1]$ viene dada por

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{2(x-2)}$$

Ahora para g .

(4)

veamos que $g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-4\}$

$$g(x) = \frac{1}{x-2} - 4$$

Por lo que para $y \in \mathbb{R} - \{-4\}$, buscaremos $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ tal que

$$g(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - 4 = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = y + 4$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \frac{1}{y+4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \frac{1}{y+4}$$

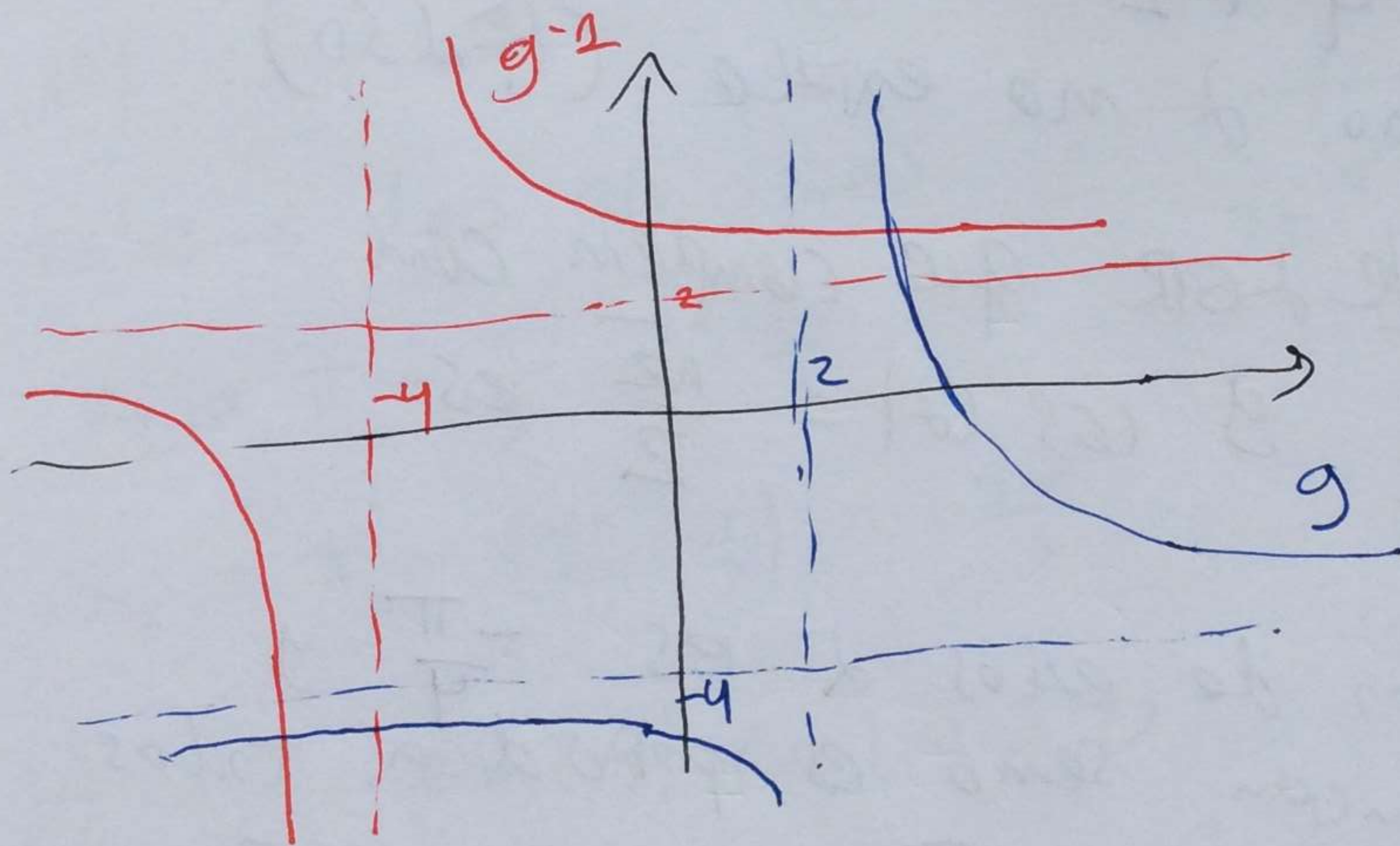
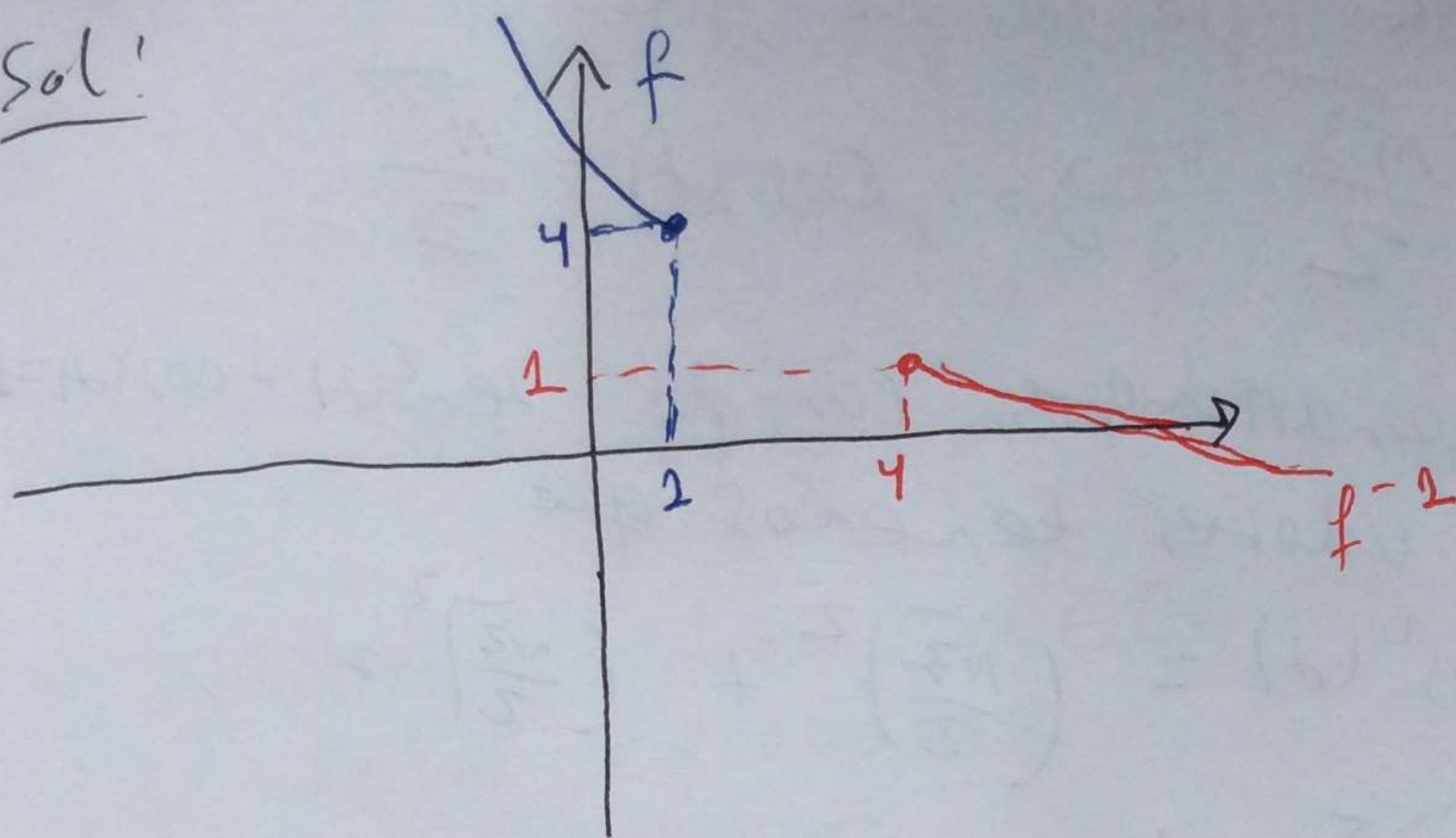
luego $g^{-1}: \mathbb{R} - \{-4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ viene dada por

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{x+4} + 2$$

c) Coloque cada função g e sua inversa em um mesmo gráfico

5

Sol:



P2) ¿Verdadero o falso? Justifique

(8)

a) Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que cumple que

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sol: Dicho α tendría que cumplir $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Pero con estos valores tenemos que

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \neq$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} \neq 1.$$

Por lo que dicho α no existe (Falso).

b) La cantidad de $\alpha \in \mathbb{R}$ que cumplen con

$$\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{es}$$

infinita.

Sol: Verdadero. Uno de estos α es $-\frac{\pi}{4}$ y ya que la función seno es periódica, todos los números del tipo $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ cumplen esta condición.

c) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$, (10)
entonces el valor de $\cos(\alpha)$ está determinado.

Sol: Falso. Dos valores que cumplen esto son

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{7\pi}{6}.$$

Pero $\cos(\alpha_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ mientras $\cos(\alpha_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

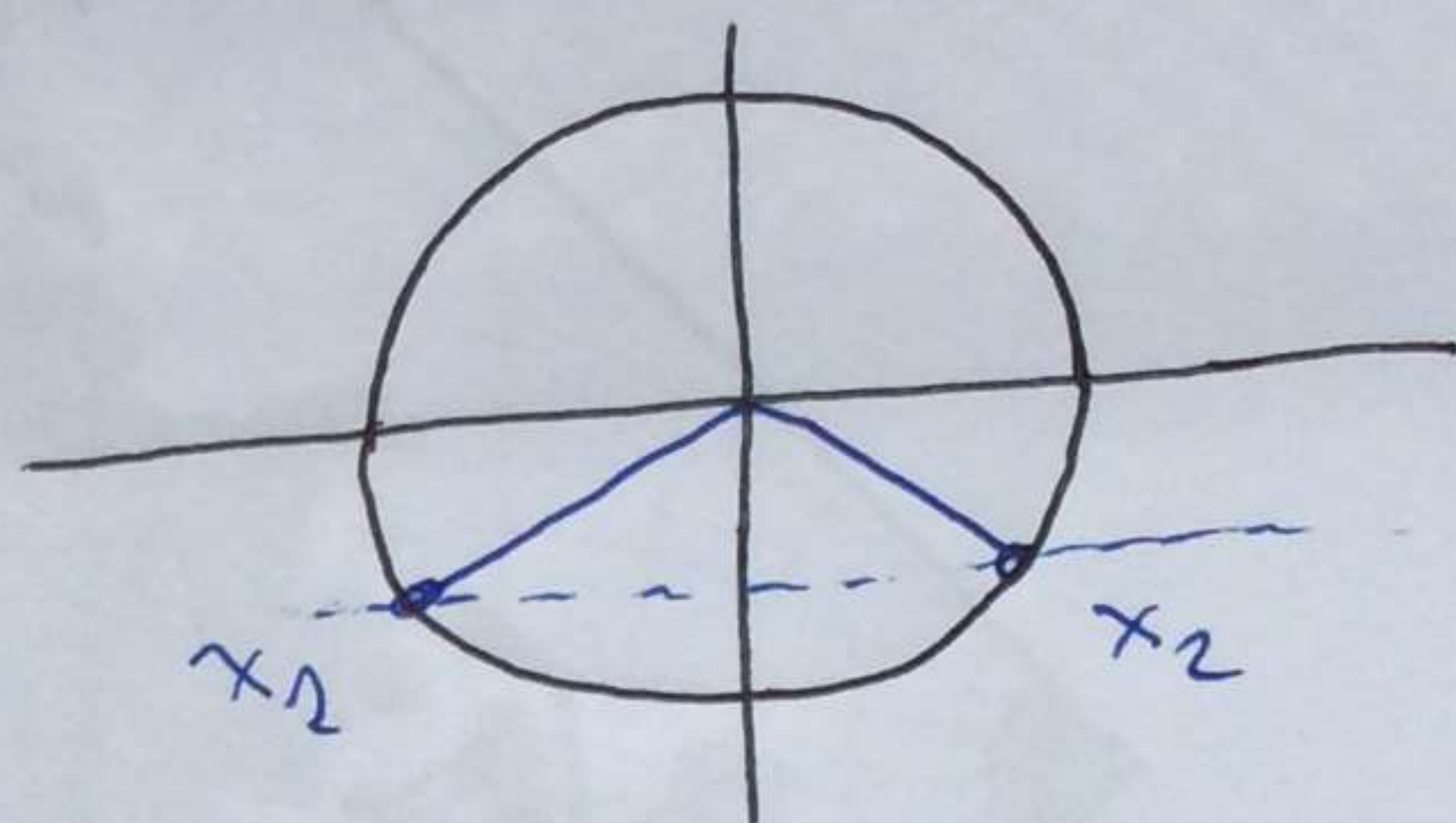
P3) Determine los $x \in [0, 2\pi[$ que tienen las siguientes ecuaciones.

a) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

tenemos dos soluciones.

$$x_1 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$x_2 = \pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3}.$$

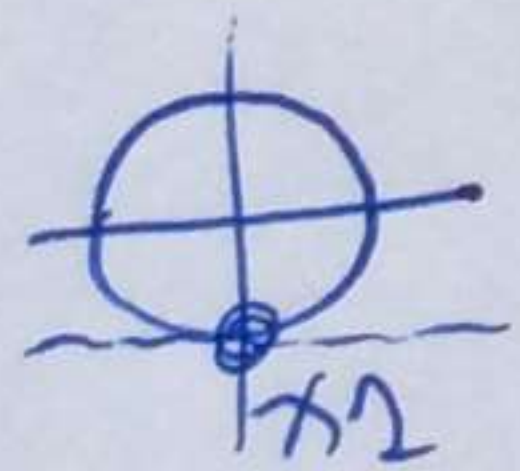


b) $(1 + \sin(x)) \cos(x) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = 0 \end{cases}$$

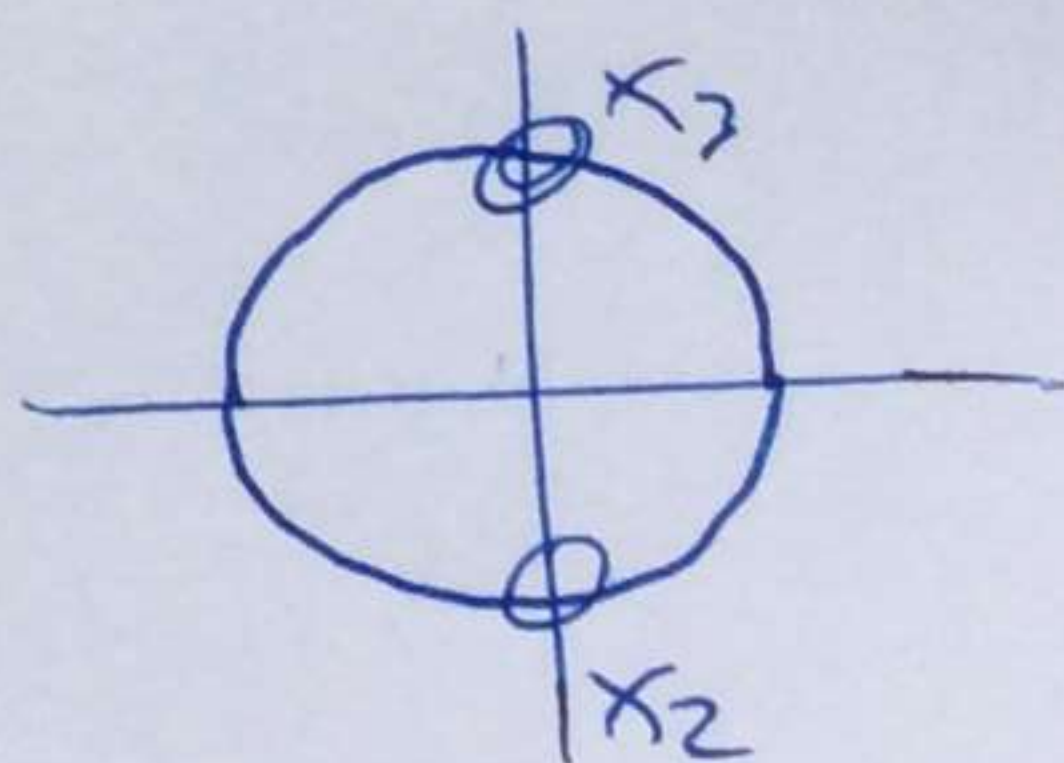
$$\Rightarrow \sin(x) = -1$$

$$\cos(x) = 0.$$



Por lo que tenemos las soluciones:

$$x_1 = x_2 = \frac{3\pi}{2} \quad | \quad x_3 = \frac{\pi}{2}.$$



$$c) \cos^2(A) = \frac{1}{2}$$

(11)

$$\Rightarrow |\cos(A)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(A) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Así que tenemos las soluciones

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \mid x_2 = \frac{3\pi}{4} \mid x_3 = \frac{5\pi}{4}$$

$$x_4 = \frac{7\pi}{4}.$$

