

Ayudantía 8

①

P1 considere las funciones

$$f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2 - 1$$

a) Determine las funciones $f+g$ y $f \cdot g$ con dominio $[-1, 2]$ y f/g con dominio $]-1, 2] - \{1\}$
sol: Ya tenemos los dominios, por lo que la regla de asignación viene dada por:

$$\bullet (f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x + 1) + (x^2 - 1)$$

$$= x^2 + 2x = x(x+2)$$

$$\bullet (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x + 1)(x^2 - 1)$$

$$= 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$\bullet (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)}$$

Por lo que tenemos las siguientes funciones

$$f+g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad | \quad f \cdot g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = x^2 + 2x \quad | \quad (f \cdot g)(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$f/g:]-2, 2] - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f/g)(x) = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)}$$

b) Determine el dominio de la función $f \circ g$ y calcule $(f \circ g)(x)$ ¿Existe $f(g(3))$?

Sol: por definición:

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \text{dom}(g) \mid g(x) \in \text{dom}(f)\}$$

$$= \{x \in [-2, 3] \mid x^2 - 1 \in [-2, 2]\}$$

$$= [-2, 3] \cap \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x^2 - 1 \leq 2\}$$

En que observamos que $-2 \leq x^2 - 1 \Leftrightarrow -2 \leq x^2$ que se cumple siempre y que $x^2 - 1 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Por lo que el segundo conjunto es $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Así:

$$\text{dom}(f \circ g) = [-2, 3] \cap [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] = [-2, \sqrt{3}].$$

Por lo que no existe $f(g(3))$.

c) ~~Determine el dominio de la función $g \circ f$~~
~~Calcule $g \circ f$~~

con este dominio, la regla de asignación queda:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 1 = 2x^2 - 1. \quad \text{Por lo que}$$

$$(f \circ g) : [-2, \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1.$$

c) Determine el dominio de la función $g \circ f$ y calcule $(g \circ f)(x)$ ¿Existe $g(f(x))$?

(3)

Sol: Por definición:

$$\text{dom}(g \circ f) = \{x \in \text{dom}(f) \mid f(x) \in \text{dom}(g)\}$$

$$= \{x \in [-2, 2] \mid -1 \leq 2x+1 \leq 3\}$$

$$\hookrightarrow \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$= [-2, 2] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

Por lo que $g(f(x))$ no existe y la regla de asignación viene dada por:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 - 1 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 - 1 = 4x^2 + 4x = 4x(x+1). \end{aligned}$$

Así:

$$g \circ f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = 4x(x+1).$$

d) Discuta si las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son iguales.

Sol: observamos que sus dominios son diferentes.

Además, $(g \circ f)(0) = 0$ mientras $(f \circ g)(0) = -1$.

Es decir, son diferentes en todo sentido.

P2] X : dosis en [mg]
 E : efecto en horas.

(4)

$$E(X) = \frac{74X}{8X+3} \quad (X \geq 0)$$

a) Expresa el modelo en forma canónica y representado gráficamente.

sol: para encontrar la forma canónica, dividimos polinomios:

$$(74X) : (8X+3) = \frac{37}{4}$$
$$= \frac{(74X + 111/4)}{-111/4}$$

$$\text{Así, } 74X = \frac{37}{4}(8X+3) - 111/4$$

reemplazando:

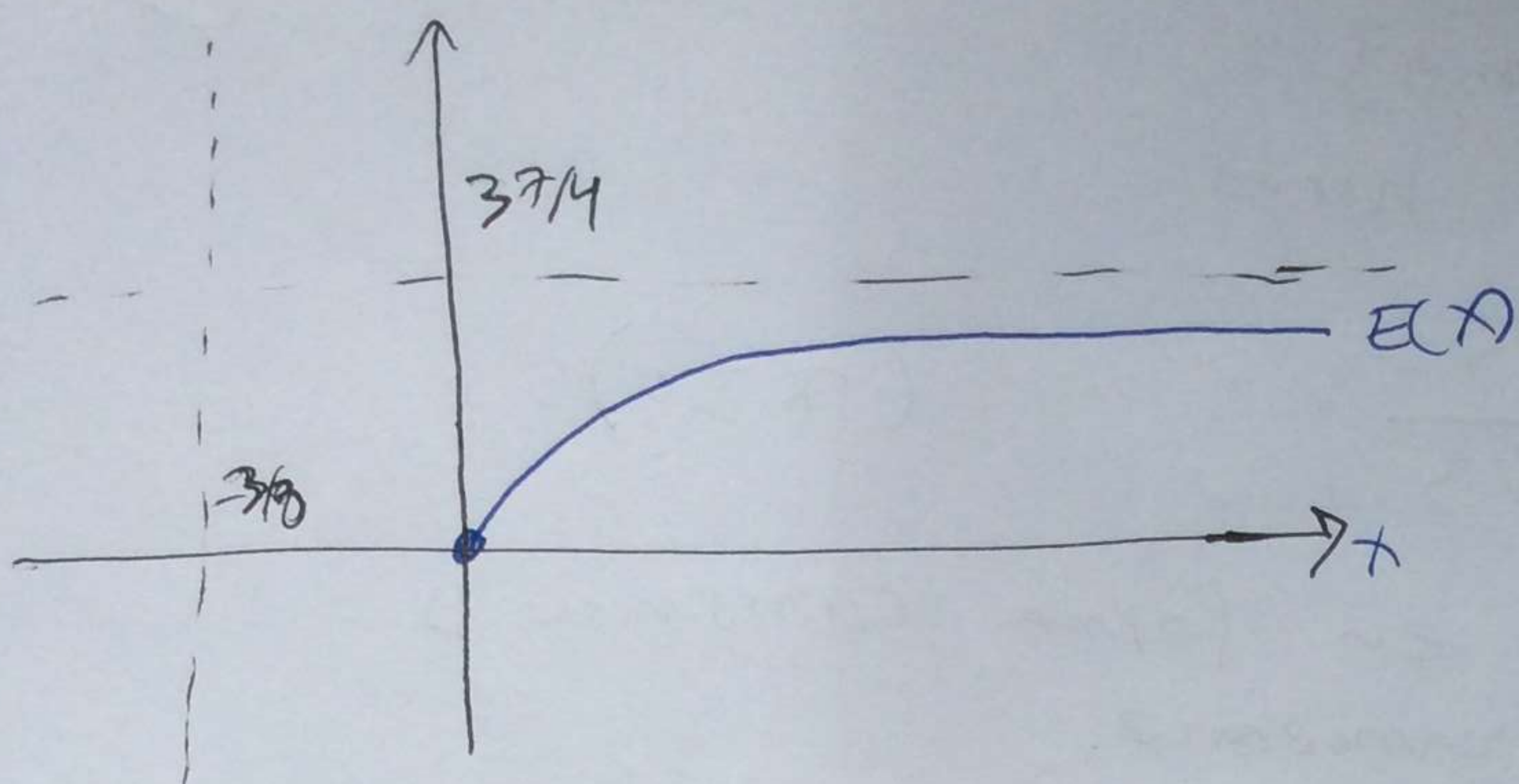
$$E(X) = \frac{74X}{8X+3} = \frac{\frac{37}{4}(8X+3) - 111/4}{8X+3} = \frac{37}{4} - \frac{111/4}{8X+3}$$
$$= \frac{37}{4} - \frac{111/4}{8(X+3/8)} = \frac{37}{4} - \frac{111/32}{X+3/8}$$

Por lo tanto, la forma canónica es:

$$E(X) = \frac{37}{4} + \frac{-111/32}{X - (-3/8)}$$

con esto y sabiendo que $E(0)=0$, graficamos.

(5)



b) ¿qué rango de dosis se requiere para que el fármaco tenga efecto entre 4 y 8 horas?

Sol: Resolvamos la ecuación:

$$4 \leq E(x) \leq 8$$

$$\Rightarrow 4 \leq \frac{37}{4} + \frac{-111/32}{x + 3/8} \leq 8 \quad | - \frac{37}{4}$$

$$\Rightarrow 4 - \frac{37}{4} \leq \frac{-111/32}{x + 3/8} \leq 8 - \frac{37}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-21}{4} \leq \frac{-111/32}{x + 3/8} \leq -\frac{5}{4} \quad | \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \frac{21}{4} \geq \frac{111/32}{x + 3/8} \geq \frac{5}{4} \quad | \cdot \frac{32}{111}$$

$$\Rightarrow \frac{21}{4} \cdot \frac{32}{111} \geq \frac{1}{x + 3/8} \geq \frac{5}{4} \cdot \frac{32}{111}$$

$$\Rightarrow \frac{56}{37} \geq \frac{1}{x + 3/8} \geq \frac{40}{111} \quad (70) \quad | \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \frac{37}{56} \leq x + \frac{3}{8} \leq \frac{111}{40} \quad | - \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{37}{56} - \frac{3}{8} \leq x \leq \frac{111}{40} - \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{8} \leq x \leq \frac{218}{8}$$

(6)

$$\Rightarrow 2 \leq x \leq 109$$

La dosis debe estar entre 2 y 109 [mg].

c) ¿Diría usted que a medida que aumenta la dosis aumenta la efectividad del fármaco?

Sol: Sí, ya que en el gráfico se puede ver que la función E es creciente.

d) ¿Indice biyectividad.

Notar que, a priori, E viene dado como

$$E: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$E(x) = \frac{37}{4} + \frac{-111/32}{x - (-\frac{3}{8})}$$

pero del gráfico se observa que la imagen es $\text{Im}(E) = [0, \frac{37}{4}[$. Que no es igual al codominio, por lo que la función no es epyectiva. Redefiniendo

$$E: [0, \infty[\rightarrow [0, \frac{37}{4}[$$

$$E(x) = \frac{37}{4} + \frac{-111/32}{x - (-\frac{3}{8})}$$

lo que obtenemos es una función estrictamente creciente, 9
y como además es estrictamente creciente,
es inyectiva.

o Esta nueva función es biyectiva.

Para ver la función inversa, sea $y \in [0, \frac{37}{4}]$,
vemos que

$$E(x) = y \Leftrightarrow \frac{37}{4} + \frac{-111/32}{x - (-3/8)} = y$$

$$\Leftrightarrow -\frac{111/32}{x - (-3/8)} = y - \frac{37}{4} \Leftrightarrow \frac{111/32}{x + 3/8} = \frac{37}{4} - y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x + 3/8} = \frac{32}{111} \left(\frac{37}{4} - y \right)$$

$$\Leftrightarrow x + 3/8 = \frac{1}{\frac{32}{111} \left(\frac{37}{4} - y \right)}$$

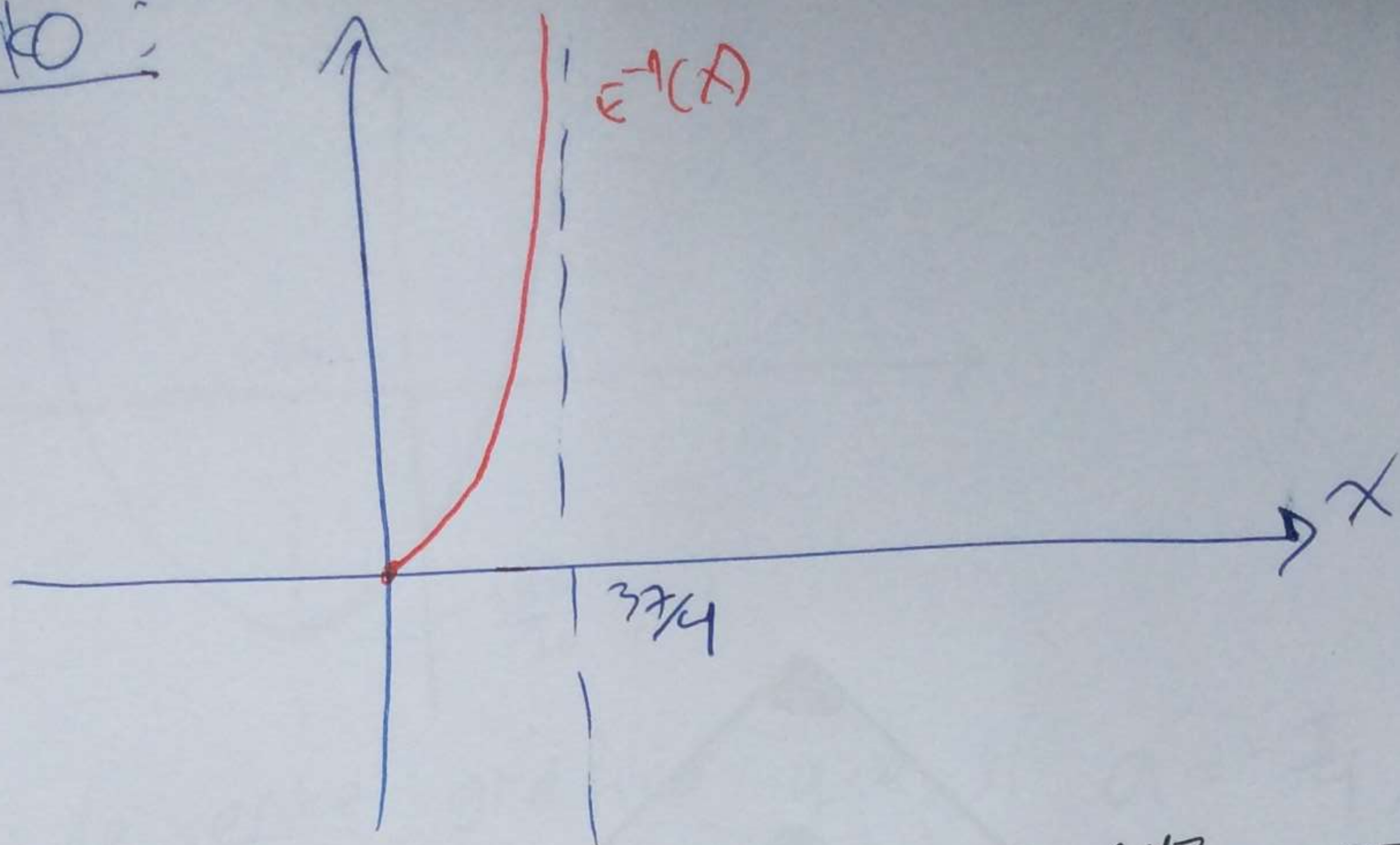
$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{8} + \frac{111/32}{\frac{37}{4} - y}$$

Por lo que $E^{-1}: [0, \frac{37}{4}] \rightarrow [0, \infty[$ viene dada por

$$E^{-1}(x) = -\frac{3}{8} + \frac{111/32}{\frac{37}{4} - y}$$

$E^{-1}(x)$ representa la cantidad de dosis necesaria
(en [mg]) para conseguir el efecto x
(en horas).

gráfico:



P3) Considere $f:]-\infty, \infty[\rightarrow]-\frac{147}{16}, \infty[$

tal que $f(x) = 3x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{9}{2}$

a) Determine a ~~para~~ que f sea biyectiva.

Sol: observamos que

$$f(x) = 3\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$$

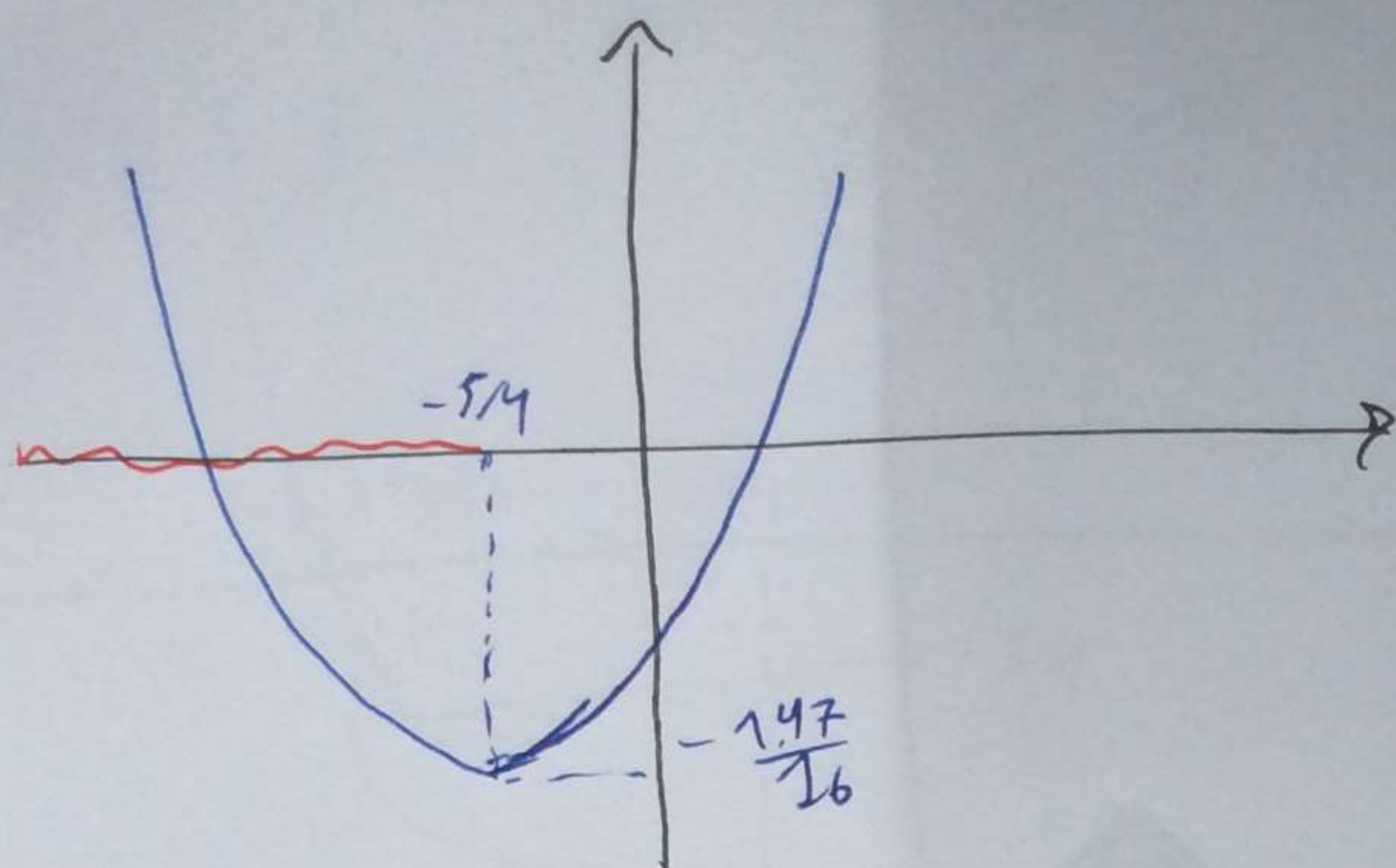
$$= 3\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$= 3\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2}\right)$$

$$= 3\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right) = 3\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{147}{16}$$

grafico con dominio $\mathbb{R}$:

⑨



veamos de este gráfico que si $a = -\frac{5}{4}$, entonces la función $f:]-\infty, a] \rightarrow [-\frac{147}{16}, \infty[$ es biyectiva.

b) Determine la función inversa de f .

sea $y \in [-\frac{147}{16}, \infty[$, busquemos $x \in]-\infty, -\frac{5}{4}]$ tal que

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{147}{16} = y$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = y + \frac{147}{16} \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(y + \frac{147}{16}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|x + \frac{5}{4}\right| = \sqrt{\frac{1}{3}\left(y + \frac{147}{16}\right)}$$

como $x \leq -\frac{5}{4}$,
 $x + \frac{5}{4} \leq 0$.

$$\Leftrightarrow -\left(x + \frac{5}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}\left(y + \frac{147}{16}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{1}{3}\left(y + \frac{147}{16}\right)}$$

c) esboce los graficos de f y f^{-1}

(10)

