~~d) ¿En qué intervalos de su dominio es f creciente o decreciente?~~ (3)

(1)

~~Sol: Del gráfico, observamos que~~

~~•) f es creciente en $[-2, \infty[$~~

~~•) f es decreciente en $]-\infty, 2]$.~~

Ayudantía 7

P1 Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por la regla

$$g(x) = -2x^2 + 8x - 2$$

a) ¿Por qué la función g está definida en todo $\mathbb{R}$?

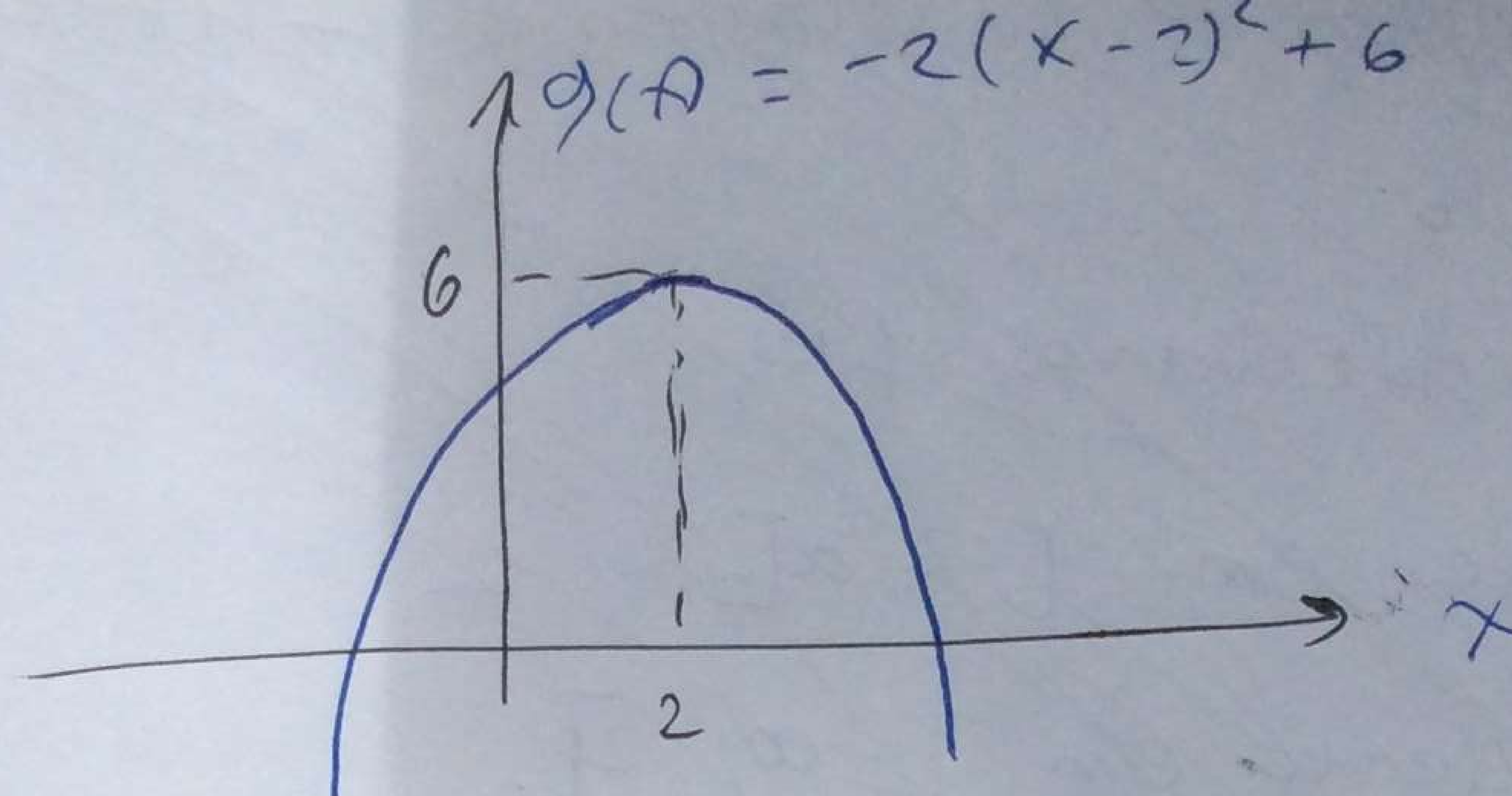
Sol: Porque no posee denominadores que se puedan anular ni raíces.

b) Esboce la gráfica de g ¿En qué intervalo de su dominio es creciente?

Sol: Para esto, completamos cuadrado como sigue

$$\begin{aligned} g(x) &= -2(x^2 - 4x + 1) \\ &= -2(\underbrace{x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2}\underbrace{- 2^2 + 1}_{-3}) \\ &= -2((x-2)^2 - 3) = -2(x-2)^2 + 6 \end{aligned}$$

Con esto, vemos que g es una función cuadrática cóncava con vértice en el punto $V=(2, 6)$. Su gráfico es entonces:



Ahora, del gráfico observamos que g es creciente en el intervalo $]-\infty, 2]$.

c) Determine el conjunto imagen de g ¿posee un valor mínimo? ¿Y un valor máximo?

Sol: observamos del gráfico que $Im(g) =]-\infty, 6]$. Conjunto que no posee valor mínimo. Pero sí posee valor máximo 6 alcanzado en $x=2$.

d) ¿Hay puntos de intersección entre el gráfico de g y el eje x? Determínelos.

Sol: Para esto debemos encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tales que $g(x)=0$ utilizando la forma canónica que obtuvimos, esto queda

$$-2(x-2)^2 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = \frac{-6}{-2} = 3 \quad / \sqrt{()} \quad (3>0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |x-2| = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, $x-2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$.

De modo que los x que dan la intersección de g con el eje x son $x_1 = 2+\sqrt{3}$ y $x_2 = 2-\sqrt{3}$.

P2 Considere $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{4x+31}{2x+14}$$

a) Determine $a, h, k \in \mathbb{R}$ t.q $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$.

Sol: Dividamos polinomios:

$$(4x+31) : (2x+14) = 2$$
$$\frac{-(4x+28)}{3}$$

$\therefore 4x+31 = 2(2x+14)+3$

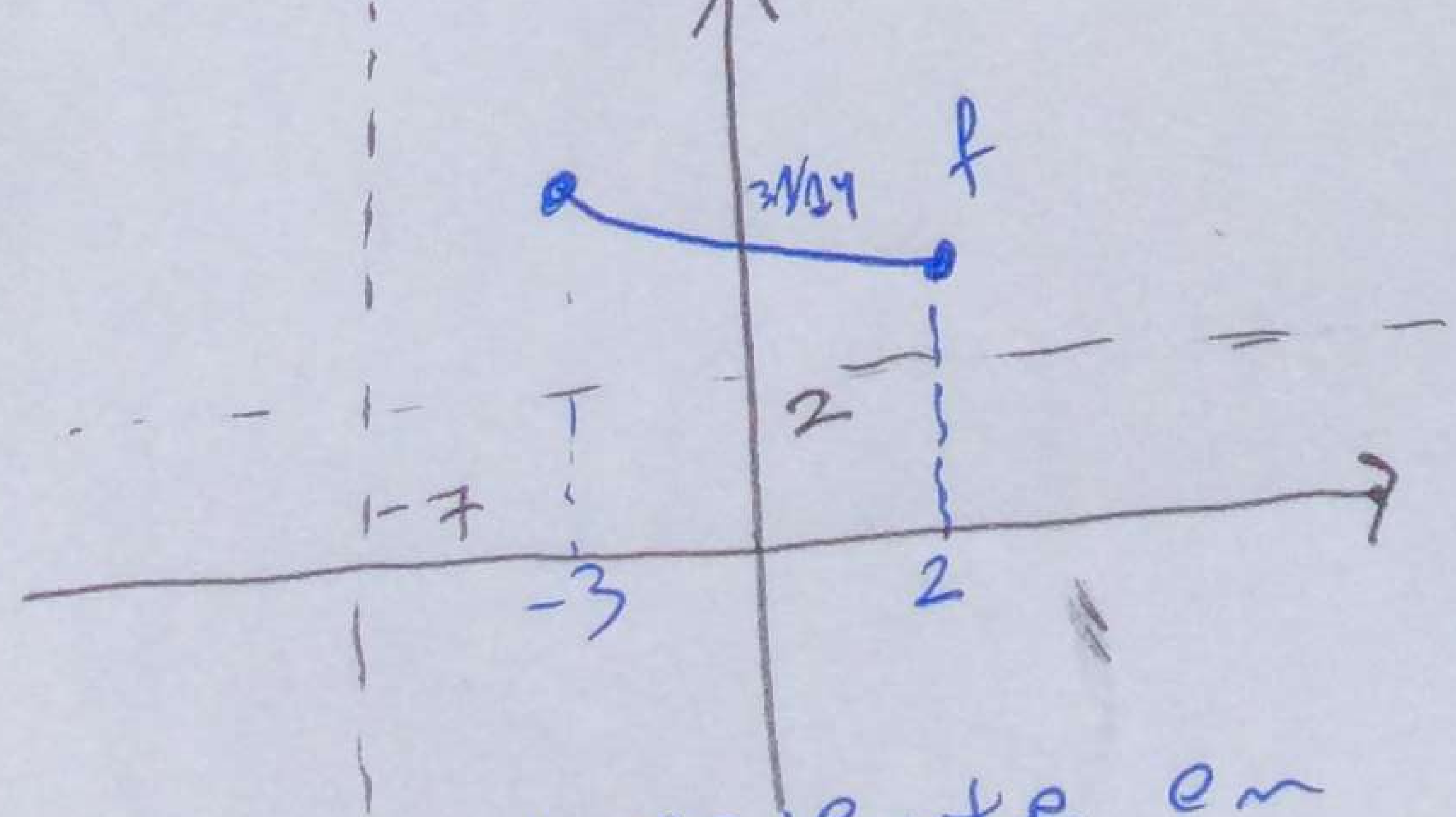
Por lo que

$$f(x) = \frac{4x+31}{2x+14} = \frac{2(2x+14)+3}{2x+14} = 2 + \frac{3}{2x+14}$$
$$= \frac{3/2}{x+7} + 2 = \frac{3/2}{x-(-7)} + 2$$

Por lo que lo pedido se cumple con $a = 3/2$, $h = -7$ y $k = 2$.

b) Esboce el gráfico de f y determine intervalos de crecimiento.

Notar que $f(0) = \frac{31}{14}$. Con esto, esbozamos el siguiente gráfico.



$\to f$ es decreciente en su dominio.

c) Determine intersecciones con los ejes.

Del gráfico, vemos que f no intersecta el eje X. La única intersección con Y es en el punto $(0, \frac{31}{14})$.

d) Determine el conjunto imagen de f ¿Es f acotada? (4)

evaluamos en los extremos,

$$f(-3) = 2 + \frac{3}{-6+14} = 2 + \frac{3}{8} = \frac{19}{8}$$

$$f(2) = 2 + \frac{3}{18} = \frac{39}{18}$$

Por lo que como f es decreciente, su imagen viene dada por

$$Im(f) = [f(2), f(-3)] = \left[\frac{39}{18}, \frac{19}{8}\right]$$

como Im(f) es acotada, vemos que f es acotada.

P3 a)

$x \in \mathbb{N}$: cantidad de arboles plantados $(x \geq 24)$

p: cantidad de manzanas producidos por cada arbol al año.

Sea $P(X)$ la cantidad de manzanas producidas por cada arbol al plantar x arboles. Los datos que tenemos nos dicen que

$$P(x) = 600 - 12(x-24)$$

pero, aparte de $x \geq 24$, necesitamos que se cumpla la restricción $P(x) \geq 0$

$$\iff 600 - 12(x-24) \geq 0$$

$$\iff x - 24 \leq \frac{600}{12} = 50$$

$$\iff x \leq 74$$

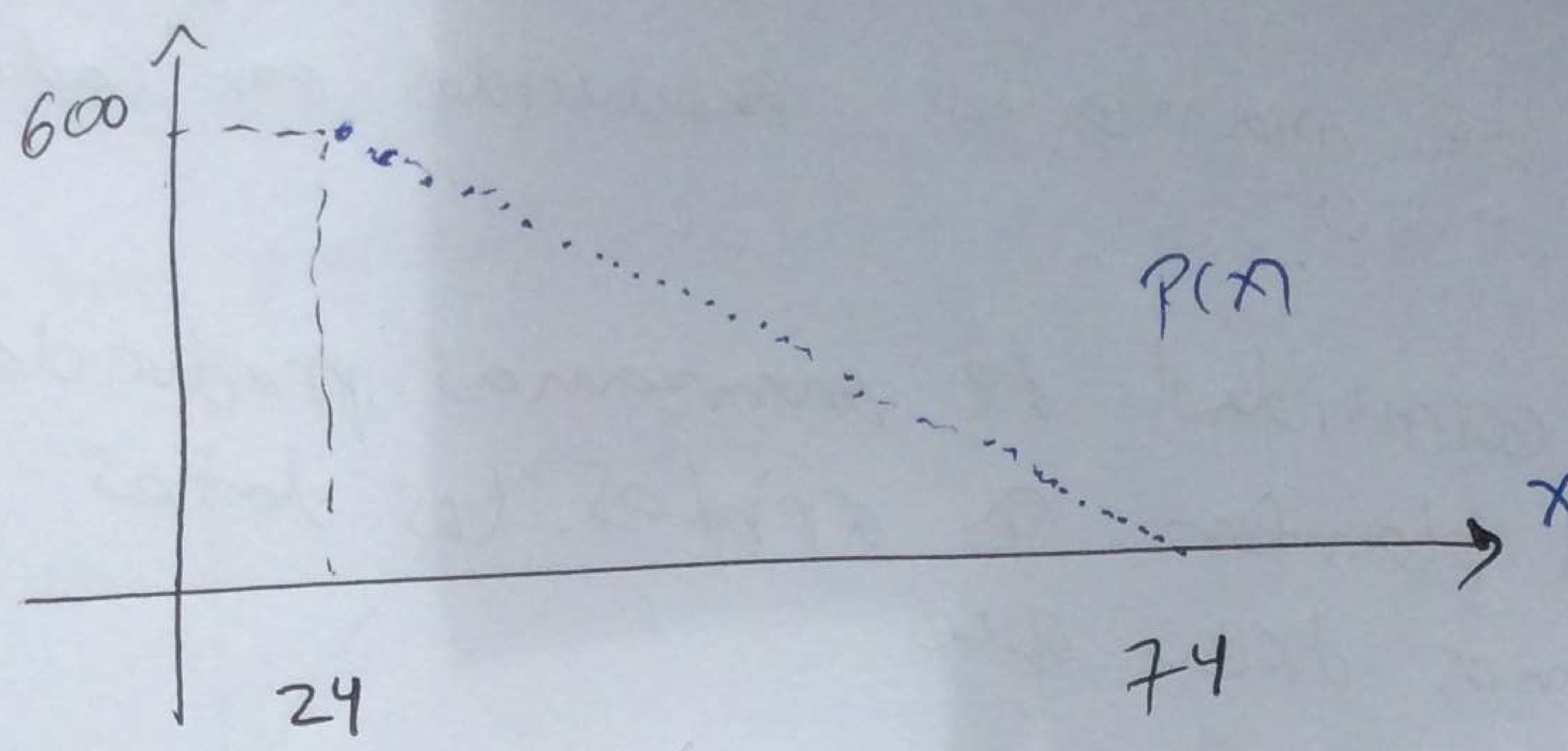
Por lo que la función P se determina por

$$P: \mathbb{N} \cap [24, 74] \to \mathbb{R}$$

$$P(x) = 600 - 12(x-24).$$

b) esbozar la gráfica de P.

Sol:



c) Modelar la producción total promedio T de manzanas en función de la cantidad de árboles plantados. Además, esbozar la gráfica.

Sol: La producción total viene dada por la producción de cada árbol multiplicado por la cantidad de árboles plantados. Es decir,

$$T(x) : x \cdot P(x)$$

Así, ya que el dominio no se altera, tenemos

$$T : \mathbb{N} \cap [24, 74] \to \mathbb{R}$$

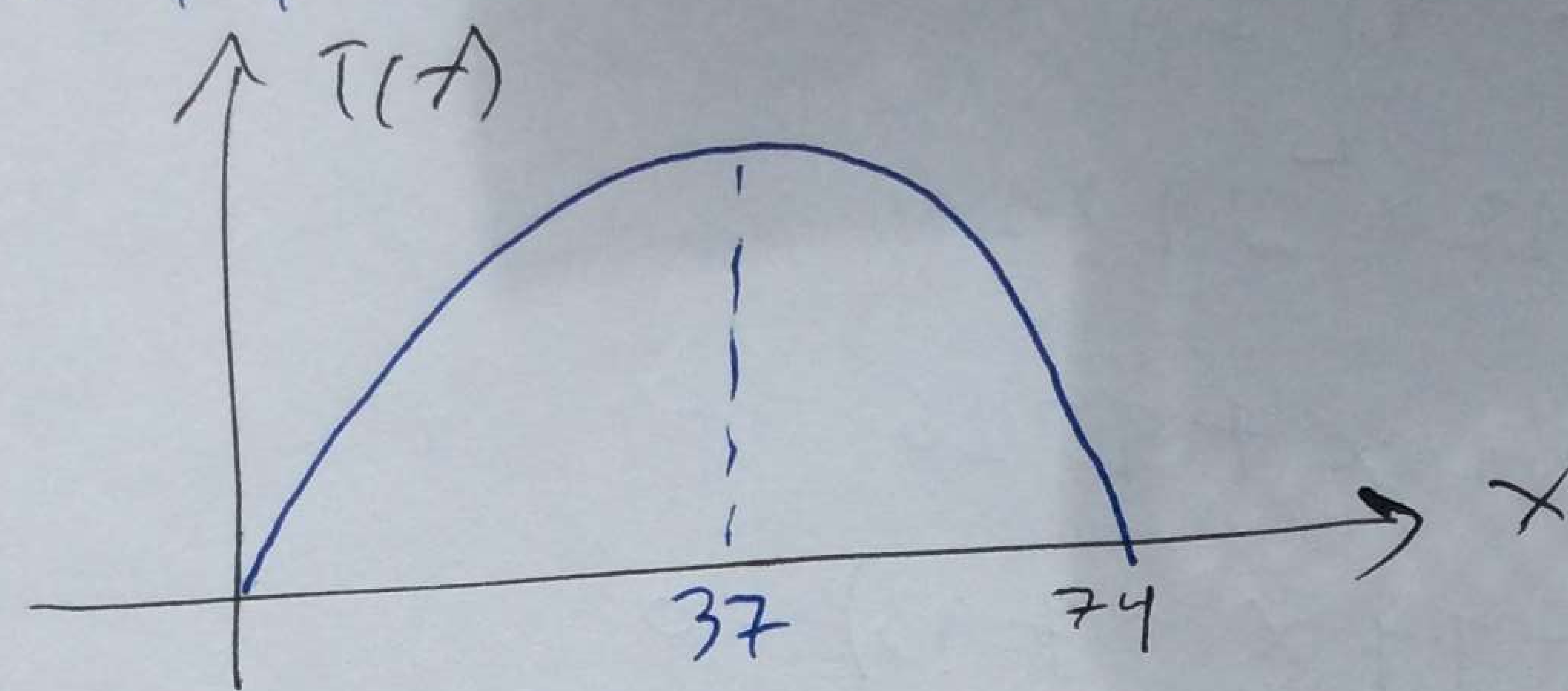
por $T(x) = x(600 - 12(x-24))$

Para esbozar la gráfica, observamos que

$$T(x) = 600x - 12(x^2 - 24x) = 600x - 12x^2 + 288x$$
$$= 888x - 12x^2 = x(888 - 12x) = 12x(74 - x)$$

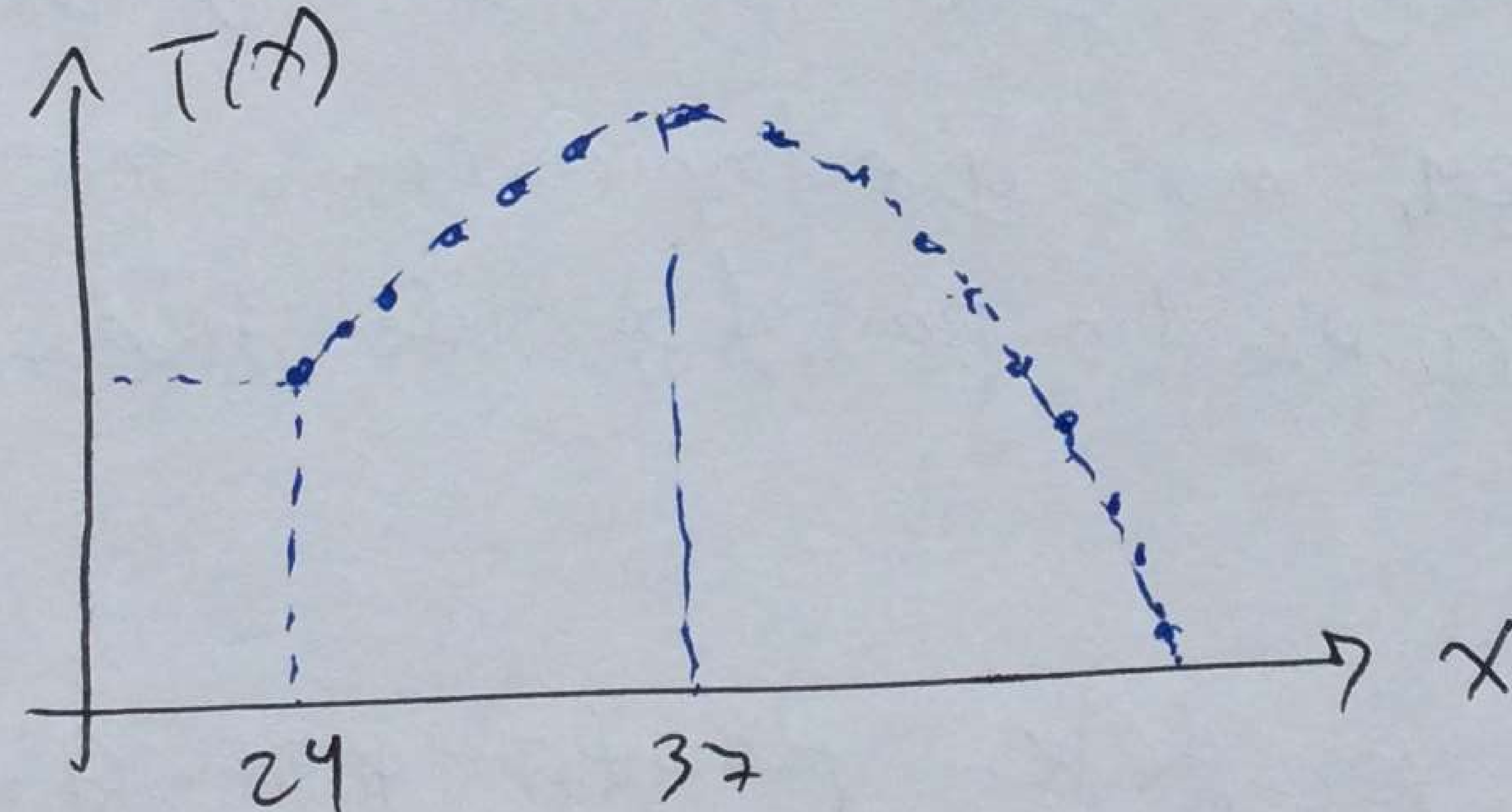
$$\therefore \quad T(x) = 12x(74 - x)$$

También vemos que, vista como función $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la función cuadrática $T(x) = 12x(74-x)$ es una función cóncava que se anula en $x=0$ y $x=74$. Por simetría, podemos esbozar su gráfico como sigue:



y sabemos que el máximo se alcanza entremedio de las raíces. Por lo que se obtiene en $x=37$.

Ahora considerando el dominio, tenemos el siguiente gráfico:



d) ¿Cuántos árboles se deben plantar para que la producción total sea de 9516 manzanas? (3)

Sol: Debemos resolver la ecuación

$$T(x) = 9516$$

$$\Leftrightarrow 888x - 12x^2 = 9516$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 888x + 9516 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{12}(x^2 - 74x + 793) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 74x + 793 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-13)(x-61) = 0$$

Por lo que las soluciones de la cuadrática son $x = 13$ y $x = 61$. Ya que el dominio de la función t pide $x \geq 24$, nos quedamos con $x = 61$. Luego, para que se cumpla lo pedido, se deben plantar 61 árboles.

e) ¿Cuántos árboles se deben plantar para que la producción total promedio sea máxima?

Por lo dicho anteriormente, el máximo de $T(x)$ se obtiene en $x = 37$

$\therefore$ se deben plantar 37 árboles.