

Pauta Control 3 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Miércoles 10 de mayo, 2023

Instrucciones:

- Disponen desde las 12:00 hasta las 12:30 h para el desarrollo del control.
 - Justifique cada uno de sus resultados.
 - Es individual.
 - Debe responder sólo uno de los dos problemas que se presentan.
 - Nombre:
-

1. Determine los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente inecuación:

$$|2x - 1| - |3 - x| \geq 2. \quad [6 \text{ puntos}]$$

Solución: Primero analizamos donde cada valor absoluto se hace cero,

$$2x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad 3 - x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3$$

0.4 puntos

Ahora, presentamos el análisis de signos

	$x \in] - \infty, 1/2[$	$x = 1/2$	$x \in]1/2, 3[$	$x = 3$	$x \in]3, \infty[$
$2x - 1$	-	0	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	0	-

1 punto

Resolución por tramo:

- Para $x < \frac{1}{2}$,

$$-2x + 1 - 3 + x \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 \geq x$$

Por lo cual, el conjunto solución a este caso está dada por

$$S_1 =] - \infty, -4].$$

1.2 puntos

- Para $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$,

$$\begin{aligned} 2x - 1 - 3 + x \geq 2 & \Longleftrightarrow 3x - 4 \geq 2 \\ & \Longleftrightarrow x \geq 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución al segundo caso está dada por

$$S_2 = [2, 3].$$

1.2 puntos

- Para $x > 3$,

$$\begin{aligned} 2x - 1 + 3 - x \geq 2 & \Longleftrightarrow x + 2 \geq 2 \\ & \Longleftrightarrow x \geq 0. \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución al tercer caso está dado por

$$S_3 =]3, +\infty[.$$

1.2 puntos

Así, podemos concluir que el conjunto solución de la inecuación está dado por

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =] - \infty, -4] \cup [2, +\infty[.$$

1 punto

2. Determine los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente inecuación:

$$-\sqrt{3x+4} > x. \quad \text{[6 puntos]}$$

Solución: En primer lugar, notemos que

$$-\sqrt{3x+4} > x \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{3x+4} < -x,$$

Restricciones:

$$3x + 4 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq -\frac{4}{3} \quad \text{y} \quad x < 0,$$

Por lo tanto,

$$x \in \left] -\frac{4}{3}, 0 \right[$$

1 punto

Luego, dado que $\sqrt{3x+4} \geq 0$ y $-x > 0$ elevamos al cuadrado manteniendo la desigualdad,

0.5 puntos

vale decir,

$$\begin{aligned} (\sqrt{3x+4})^2 \leq (-x)^2 &\implies 3x+4 < x^2 \\ &\implies 0 < x^2 - 3x - 4 \end{aligned}$$

1 punto

Además, $x^2 - 3x - 4 = 0$ presenta un discriminante $\Delta = 25 > 0$, por lo cual, tenemos dos soluciones reales

$$x_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

1 punto

Entonces,

$$0 < x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

0.5 puntos

Análisis de signos:

	$x \in]-\infty, -1[$	$x = -1$	$x \in]-1, 4[$	$x = 4$	$x \in]4, \infty[$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 4)(x + 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

1 punto

Por lo tanto, $x^2 - 3x - 4 > 0$ si $x \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$.

0.5 puntos

Por ultimo, el conjunto solución de la inecuación está dado por

$$S = \left] -\frac{4}{3}, 0 \right[\cap \left(\left] -\infty, -1[\cup]4, +\infty[\right) = \left] -\frac{4}{3}, -1 \right[.$$

0.5 puntos