

Ayudame 5: Pauta

(1)

PI Un fabricante ha observado que si el precio de venta de una unidad de su producto es x (medido en miles de pesos), entonces él logra una utilidad dada por:

$$U = (120 - x)(x - 20)$$

En que U viene también medida en miles de pesos.

a) Determine entre qué valores debe vender las unidades del producto de manera que las utilidades obtenidas sean superiores a \$1.600.000.

Sol: Notar primero que la inequación que buscamos resolver es

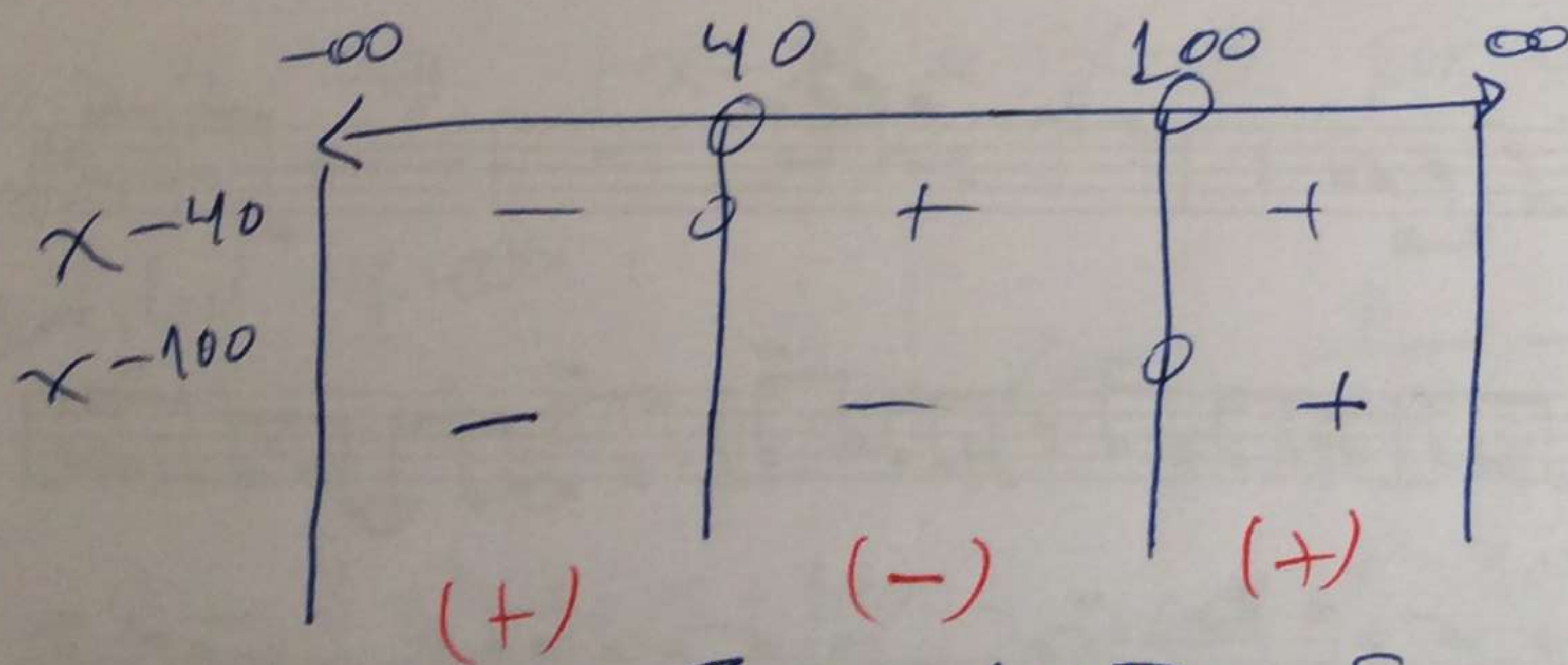
$$U > 1.600$$

$$\Leftrightarrow (120 - x)(x - 20) > 1.600$$

$$\Leftrightarrow 120x - 2400 - x^2 + 20x > 1600$$

$$\Leftrightarrow 0 > x^2 - 140x + 4000$$

$$\Leftrightarrow 0 > (x - 100)(x - 40)$$



$$\rightarrow x \in]40, 100[. = S$$

Por lo que el precio debe estar entre \$40.000 y \$100.000 para que se cumpla lo pedido

b) $\rightarrow$ las cotas inferiores de S conforman el conjunto $] -\infty, 40]$, la mayor de las cuales es 40.

(2)

$\rightarrow$ las cotas superiores de S conforman el conjunto $[100, \infty[$, la menor de las cuales es 100.

Como ninguno de estos valores pertenece al conjunto S , el no tiene ni máximo ni mínimo.

P2 | considere la inequacion:

$$|x-8| \leq \frac{8}{x-2}$$

a) Hallar el conjunto solución S de esta inequacion.

Notamos primero que como restricción tenemos que $x \neq 2$.
Con esto en mente, analizamos los dos casos posibles:
 $x-8 \geq 0$ y $x-8 < 0$. Que corresponden a los intervalos $] -\infty, 8[$ y $[8, \infty[$

En el primer caso, tenemos:

$$x-8 \geq 0 \rightarrow |x-8| = x-8. \text{ Por lo que la}$$

($x \in [8, \infty[$)

desigualdad queda:

$$x-8 \leq \frac{8}{x-2} \Leftrightarrow \frac{8}{x-2} - \frac{(x-8)(x-2)}{x-2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 - (x^2 - 10x + 16)}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 10x + 16 - 8}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 10x + 8}{x-2} \leq 0$$

Para factorizar la cuadrática, evaluamos el discriminante: ③

$$\Delta = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 100 - 32 = 68 = 4 \cdot 17$$

Por lo que las soluciones de $x^2 - 10x + 8 = 0$ son

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{68}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{17}}{2} = 5 \pm \sqrt{17}$$

de modo que tenemos la factorización:

$$x^2 - 10x + 8 = (x - (5 + \sqrt{17}))(x - (5 - \sqrt{17}))$$

Por lo que la inecuación queda:

$$\frac{(x - (5 + \sqrt{17}))(x - (5 - \sqrt{17}))}{x - 2} \leq 0$$

Nota:

$$\sqrt{17} > \sqrt{16} = 4$$

$$\Rightarrow 5 + \sqrt{17} \approx 9$$

$$5 - \sqrt{17} \approx 1$$

Ahora, haremos la tabla de signos:

	$-\infty$	$5 - \sqrt{17}$	2	$5 + \sqrt{17}$	∞
$x - (5 + \sqrt{17})$	-	0	+	0	-
$x - 2$	-	-	0	+	+
$x - (5 - \sqrt{17})$	-	-	-	0	+
		(-)	(+)	(-)	(+)

$$\rightarrow x \in]-\infty, 5 - \sqrt{17}] \cup]2, 5 + \sqrt{17}]$$

Esta es la solución a la inecuación, ~~pero~~ ^{fraccionaria} pero debemos quedarnos solamente con los valores en $[0, \infty)$.

Por lo que tenemos $S_1 = [0, 5 + \sqrt{17}]$.

Ahora, busquemos soluciones en el intervalo $] -\infty, 8[$.

(4)

$$x \in] -\infty, 8[\Rightarrow x < 8 \Rightarrow x - 8 < 0.$$

$\Rightarrow |x - 8| = -(x - 8)$. Por lo que aquí, la inecuación nos queda:

$$-(x - 8) \leq \frac{8}{x - 2} \Leftrightarrow \frac{8}{x - 2} + (x - 8) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 + (x - 8)(x - 2)}{x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8 + x^2 - 10x + 16}{x - 2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 10x + 24}{x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 6)(x - 4)}{x - 2} \geq 0$$

tabla de signos:

	$-\infty$	2	4	6	∞
$x - 2$		$\circ$			
$x - 4$			$\circ$		
$x - 6$				$\circ$	
	$-$	$+$	$+$	$+$	
	$-$	$-$	$+$	$+$	
	$-$	$-$	$-$	$+$	
	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	

$$\rightarrow x \in]2, 4] \cup [6, \infty[$$

pero nos debemos quedar solamente con los $x \in] -\infty, 8[$.

$$\text{Por lo que } S_2 =]2, 4] \cup [6, 8[$$

Uniendo ambas, tenemos:

$$S = S_1 \cup S_2 =]2, 4] \cup [6, 5 + \sqrt{17}]$$

→ Las cotas inferiores de S conforman el conjunto $] -\infty, 2]$, la mayor de las cuales es 2.

(5)

→ Las cotas superiores de S conforman el conjunto $[5 + \sqrt{17}, \infty[$, la menor de las cuales es $5 + \sqrt{17}$.

→ Ya que $2 \notin S$, S no tiene mínimo.

→ Ya que $5 + \sqrt{17} \in S$, S sí tiene máximo, y es $5 + \sqrt{17}$.

P3] considere los conjuntos A y B definidos por

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x+1| < |x-5| + 2 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \leq x-1 \}$$

a) Escribir A y B como intervalo o unión de intervalos.

Vamos con el cjo A primero. Para ello, resolvemos la ine cuada cm:

$$|x+1| < |x-5| + 2.$$

tenemos los puntos "críticos" $x=5$, $x=-1$ que nos dividen la recta real como sigue:

$$\mathbb{R} =]-\infty, -1[\cup [-1, 5[\cup [5, \infty[$$

Entonces, analizamos en tres casos:

⑥

1) $x \in]-\infty, -1[$.

• $x+1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$

• $x-5 < 0 \Rightarrow |x-5| = -(x-5)$

Por lo que la ine cuación nos queda:

$$-(x+1) < -(x-5) + 2$$

$$\Leftrightarrow -x - 1 < -x + 5 + 2 = -x + 7$$

$$\Leftrightarrow -1 < 7 \quad \text{que se cumple siempre.}$$

Por lo que la solución sería $\mathbb{R}$,

pero debemos intersectar con nuestro intervalo.

Nos queda: $S_1 =]-\infty, -1[$.

2) $x \in [-1, 5[$.

• $x+1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$

• $x-5 < 0 \Rightarrow |x-5| = -(x-5)$

Por lo que la ine cuación nos queda:

$$x+1 < -(x-5) + 2 \Leftrightarrow x+1 < -x+7$$

$$\Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3. \Rightarrow x \in]-\infty, 3[$$

pero intersectamos con nuestro intervalo:

$$S_2 = [-1, 3[$$

$$3) x \in [5, \infty[.$$

7

$$\bullet x+1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$\bullet x-5 \geq 0 \Rightarrow |x-5| = x-5$$

Así que la inequación queda:

$$x+1 < x-5+2 \Leftrightarrow 1 < -3 \text{ que}$$

no se cumple nunca. Por lo que no hay soluciones en este intervalo:

$$S_3 = \emptyset.$$

Uniendo entonces, tenemos:

$$A = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]-\infty, 3[.$$

Ahora, vamos con el csto B. Para el cual resolvemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \leq x-1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Restricción:} \\ 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$x \in]-\frac{1}{2}, \infty[$$

Nos gustaría elevar al cuadrado, pero para ello debemos antes notar que ya que queremos que $x-1$ sea mayor que una cantidad positiva, este mismo debe ser un número positivo. Lo que nos añade la información:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, \infty[.$$

Así que tenemos como restricciones, que

⑧

$$x \in [1, \infty[.$$

con dlo, podemos elevar al cuadrado manteniendo el orden y nos queda:

$$\frac{1}{2x+1} \leq (x-1)^2$$

~~$$\frac{1}{2x+1} \leq x^2 - 2x + 1$$~~

~~$$1 \leq (x^2 - 2x + 1)(2x + 1)$$~~

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - \frac{1}{2x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(2x+1) - 1}{2x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - 2x + 1)(2x + 1) - 1}{2x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 + x^2 - 4x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2x} + 1 - 1}{2x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 3x^2}{\cancel{2x} + 1} \geq 0$$

$$\frac{x^2(2x-3)}{2x+1} \geq 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Puntos críticos:} \\ x = 3/2 \\ x = -1/2 \end{array} \right.$$

9

Como $x^2 \geq 0$, la tabla de signos va a venir dada por los otros factores

	$-1/2$	$3/2$	
	$\circ$	$\circ$	
$2x-3$	-	-	+
$2x+1$	-	+	+
	(+)	(-)	(+)

$$\rightarrow x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup [\frac{3}{2}, \infty[$$

Pero intersectando con nuestra restricci3n $[1, \infty[$, nos queda la soluci3n

$$B = [\frac{3}{2}, \infty[$$

Asi:

$$A =]-\infty, 3[$$

$$B = [\frac{3}{2}, \infty[$$

b) Por lo tanto, $A \cap B = [\frac{3}{2}, 3[$. Que es un conjunto acotado. Una cota superior es 3 y una cota inferior es $\frac{3}{2}$.