

Ayudamtra 6:

①

P1 | Se sabe que la única raíz racional de

$$P(x) = -9x^3 + 9x^2 + x - 2$$

está en el intervalo $] \frac{1}{2}, 1[$.

a) Determine todas las raíces reales del polinomio $P(x)$.

Sol: veamos las raíces racionales. ~~los candidatos son:~~
los divisores son:

$$\text{div}(2) = \{ \pm 2, \pm 1 \}$$

$$\text{div}(-9) = \{ \pm 1, \pm 3, \pm 9 \}$$

Por lo que los candidatos están en

$$C = \{ \pm 1, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{9} \}$$

el dato dado nos descarta a todos los candidatos salvo el $\frac{2}{3}$, por lo que probamos ese:

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = -9\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right) - 2$$

$$= -9 \cdot \frac{8}{27} + 9 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 2$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{2}{3} - 2 = -\frac{6}{3} + 2 = -2 + 2 = 0.$$

Por lo que $x = \frac{2}{3}$ es raíz de P .

Sabiendo esto, podemos dividir $P(x) : (x - \frac{2}{3})$ sabiendo que el resto nos va a dar 0.

Hagamos la división:

$$\begin{array}{r} (-9x^3 + 9x^2 + x - 2) : (x - \frac{2}{3}) = -9x^2 + 3x + 3 \quad (2) \\ -(-9x^3 + 6x^2) \\ \hline 0 + 3x^2 + x \\ - (3x^2 - 2x) \\ \hline 0 + 3x - 2 \\ - (3x - 2) \\ \hline 0 // \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} -9x^3 + 9x^2 + x - 2 &= (-9x^2 + 3x + 3)(x - \frac{2}{3}) \\ &= 3(-3x^2 + x + 1)(x - \frac{2}{3}) \\ &= (-3x^2 + x + 1)(3x - 2) \end{aligned}$$

Así, para terminar, tendríamos que encontrar las raíces de $-3x^2 + x + 1$, cosa que podemos hacer con fórmula cuadrática:

$$-3x^2 + x + 1 = 0 \quad | \quad \Delta = 1^2 - 4(-3)1 = 1 + 12 = 13$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{-6} \rightarrow \begin{aligned} &= \frac{-1 + \sqrt{13}}{-6} = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \\ &\rightarrow = \frac{-1 - \sqrt{13}}{-6} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \end{aligned}$$

Por lo que las raíces de P conforman el conjunto:

$$S = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right\}$$

b) Descompone $P(x)$ como producto de polinomios (3) de grado 1.

Sol: Sabremos que:

$$P(x) = (-3x^2 + x + 1)(3x - 2)$$

y por propiedad vista en clases sobre factorización de cuadráticas, tenemos que:

$$(-3x^2 + x + 1) = -3 \left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right)$$

Por lo que concluimos que:

$$P(x) = -3 \left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right) (3x - 2).$$

P2(a) Determine a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

Sol: Lo que haremos será hacer la división e imponer que el resto sea 0.

$$\begin{array}{r} (x^3 + ax^2 + bx + 5) : (x^2 + x + 1) = x + (a-1) \\ \underline{-(x^3 + x^2 + x)} \\ 0 + (a-1)x^2 + (b-1)x + 5 \\ \underline{-(a-1)x + (a-1)x + (a-1)} \\ (b-a)x + 5 - a + 1 = (b-a)x + 6 - a. \end{array}$$

Queremos que el resto sea el polinomio $0x + 0$,

por lo que igualamos coeficientes

$$b - a = 0 \rightarrow b = a$$

$$6 - a = 0 \rightarrow a = 6$$

Por lo que $a = b = 6$ son los valores buscados.

b) Encuentre $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + 4$ sea divisible por $x+2$ y los restos obtenidos al dividirlo por $x+1$ y $x+3$ sean iguales. (4)

Sol: Sabemos (teorema del resto) que el resto al dividir $P(x)$ por $(x-a)$ es $P(a)$.

por lo que el resto al dividir por $(x+1) = (x - (-1))$ es $P(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + 4 = a - b + 4$.

Análogamente, el resto al dividir por $x+3$ es

$$P(-3) = a(-3)^2 + b(-3) + 4 = 9a - 3b + 4.$$

Ya que buscamos que sean iguales, pedimos que

$$a - b + 4 = 9a - 3b + 4$$

$$\Rightarrow 0 = 8a - 2b$$

$$\Rightarrow 0 = 4a - b \quad (1)$$

También necesitamos que el polinomio sea divisible por $(x+2)$. o bien, que el resto al dividir por $(x+2)$ sea 0. es decir (teorema del factor)

$$P(-2) = 0 \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4a - 2b + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2a - b + 2 = 0 \quad (2)$$

Debemos entonces resolver el siguiente sistema de ecuaciones (5)

$$\begin{cases} 4a - b = 0 & (1) \\ 2a + b + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Haciendo $(1) + (2)$: $6a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$.

reemplazando en (1):

$$4 \cdot \frac{-1}{3} - b = 0 \Rightarrow b = \frac{-4}{3}$$

Por lo que los valores que cumplen lo pedido son:

$$a = -\frac{1}{3} \quad | \quad b = -\frac{4}{3}$$

P3 Sean $(x-2)$ y $(x-5)$ factores de un polinomio mónico de grado 3. Si se sabe que al dividir el polinomio por $(x+4)$ se obtiene -54 como resto, determine explícitamente el polinomio $P(x)$.

sol: tenemos las sigtes pistas

(1) $P(x)$ es de grado 3 $\rightarrow P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(2) $P(x)$ es mónico $\rightarrow a = 1$

(3) $(x-2)$ es factor de $P(x)$ $\rightarrow P(2) = 0$.

(4) $(x-5)$ es factor de $P(x)$ $\rightarrow P(5) = 0$

(5) $P(x) : (x+4)$ da resto $-54 \rightarrow P(-4) = -54$.

Combinando (1) y (2), podemos escribir el polinomio (6) como

$$P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d.$$

Además, (3) nos entrega la ecuación:

$$P(2) = (2)^3 + b(2)^2 + c \cdot 2 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + 4b + 2c + d = 0 \quad (3).$$

y (4) nos entrega:

$$P(5) = (5)^3 + b(5)^2 + 5 \cdot c + d = 0$$

$$\Leftrightarrow 125 + 25b + 5c + d = 0 \quad (4)$$

Finalmente, (5) nos entrega:

$$P(-4) = (-4)^3 + b(-4)^2 + c(-4) + d = -54$$

$$\Leftrightarrow -64 + 16b - 4c + d = -54$$

$$\Leftrightarrow 64 - 16b + 4c - d = 54 \quad (5)$$

Por lo que tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{array}{l} 4b + 2c + d = -8 \\ 25b + 5c + d = -125 \\ -16b + 4c - d = -10 \end{array}$$

La solución a este sistema es

$$b = -4 \quad | \quad c = -12 \quad | \quad d = 30.$$

Así, el polinomio queda escrito como

⑦

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30 \quad \square$$