Ayudantía 4

P1 a) Determine el conjunto de los números reales x para los cuales se verifica que $x < \sqrt{x}$.

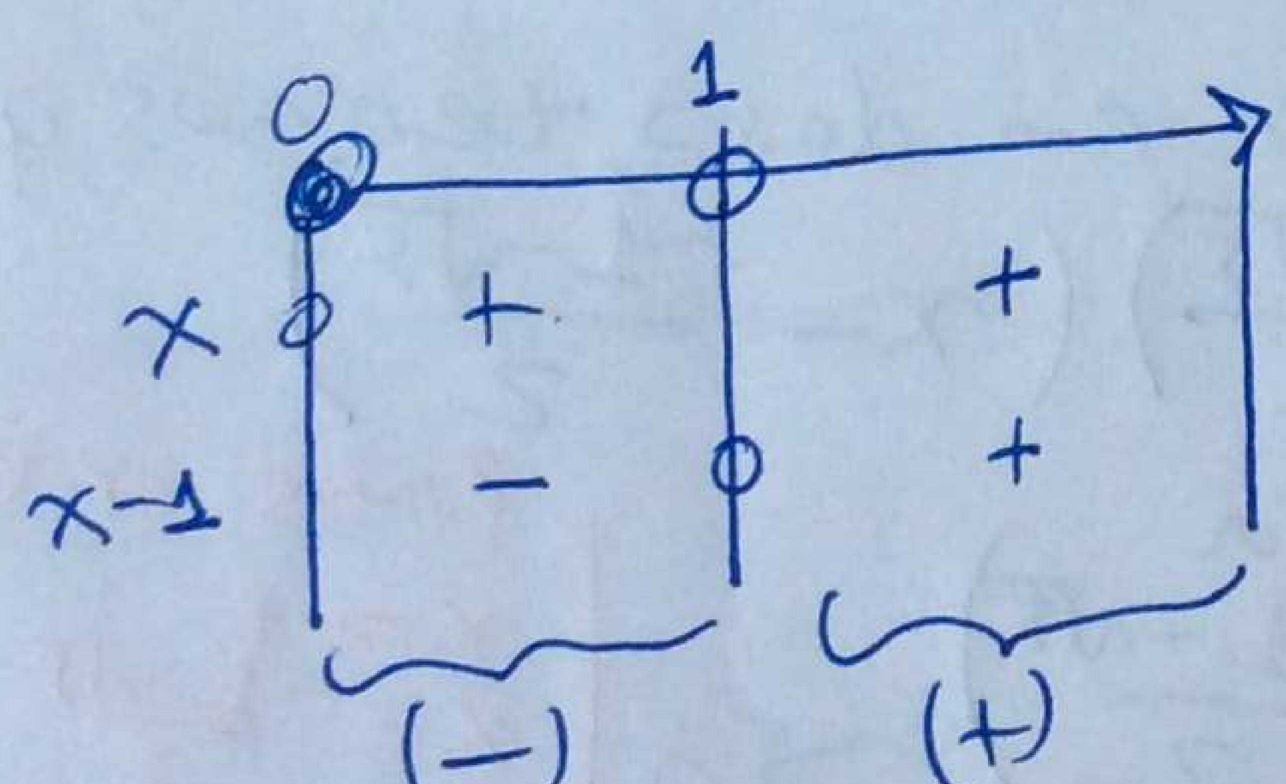
Sol: Primero, notamos que como restricción se debe cumplir que $x \geq 0$ para que la raíz quede bien definida. Con esto en mente y sabiendo que por lo tanto ambos lados de la desigualdad tienen igual signo, podemos elevar al cuadrado:

$$x < \sqrt{x} \quad / \ ()^2$$

$$\iff x^2 < x \iff x^2 - x < 0$$

$$\iff x(x-1) < 0$$ → puntos críticos: $x = 0, 1$.

Hacemos una tabla de signos para resolver esta desigualdad:



Por lo tanto, nos quedamos con la solución $x \in]0,1[$ que se encuentra dentro de nuestras restricciones.

b) Determine el conjunto de los números reales x para los cuales se verifica que $\frac{1}{x+1} < x$ (2)

Sol: como restricción, tenemos que $x \neq 1$ para que la fracción quede bien definida. Luego, vemos que

$$\frac{1}{x+1} < x \iff \frac{1}{x+1} - x < 0 \iff \frac{1 - x(x+1)}{x+1} < 0$$

$$\iff \frac{-x^2 - x + 1}{x+1} < 0 \quad \Big/ \cdot (-1)$$

$$\iff \frac{x^2 + x - 1}{x+1} > 0$$

Para factorizar la expresión cuadrática, vemos que

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \to \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$$

Por lo que hay dos soluciones

$$\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, por propiedad vista en clases, tenemos que

$$x^2 + x - 1 = \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Así que la inecuación equivale a

$$\frac{\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}{x+1} > 0.$$

Puntos críticos:
$x = -1$
$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Así que haremos una tabla de signos para evaluar las soluciones.

Antes notamos que $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2 \Rightarrow -\sqrt{5} < -2$

$\Rightarrow -1 - \sqrt{5} < -1 - 2 = -3 \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{3}{2} < -1$. Así que la ubicación en la tabla queda como sigue.

	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	-1	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Por lo que la solución nos queda:

$$x \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right[$$

y como esto incluye nuestra restricción, esta es la solución de la inecuación.

P2| Determine el conjunto de números reales x tales que

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} \leq 1$$

Sol: Primero evaluamos las restricciones. Para ello, resolvemos la desigualdad

$$\frac{2x-1}{x+2} \geq 0$$

Puntos críticos:
$x=-2$
$x=1/2$

Hacemos tabla de signos:

	-2	$1/2$	
$2x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Por lo tanto, nuestra restricción queda:

$$x \in]-\infty, -2[\cup [\tfrac{1}{2}, \infty[.$$

Con esta restricción en mano, elevamos ambos lados al cuadrado sin cambiar el orden ya que sabemos que los resultados de las raíces son positivas.

$$\iff \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} \leq 1 \quad \Big/ \, (\;)^2$$

$$\iff \frac{2x-1}{x+2} \leq 1 \iff \frac{2x-1-1(x+2)}{x+2} \leq 0$$

$$\iff \frac{2x-1-\cancel{x}-2}{x+2} \leq 0 \iff \frac{x-3}{x+2} \leq 0$$

→ Puntos críticos:
$x=-2$
$x=3$

Hacemos tabla de signos:

	$]-\infty,-2[$	$]-2,3[$	$]3,\infty[$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Nos queda entonces la solución $x \in \left]-2, 3\right]$.

Al tomar en cuenta la restricción, nos queda la solución final

$$x \in \left[\tfrac{1}{2}, 3\right].$$

P3) Determine el conjunto de números reales cuya distancia al 1 es siempre mayor al doble de su distancia al -2.

Sol: Recordando que la distancia entre dos números reales x e y se calcula como $|x-y|$, podemos escribir lo que se pide como la siguiente inecuación:

$$|x-1| > 2|x+2| \rightarrow \text{No hay restricciones.}$$

En este caso, la desigualdad se puede elevar al cuadrado ya que ambos miembros son positivos.
Y así, nos queda una inecuación cuadrática:

$$|x-1|^2 > 4|x+2|^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 > 4(x+2)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1 > 4(x^2+4x+4)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1 > 4x^2+16x+16 \Leftrightarrow 0 > 3x^2+18x+15$$

$$\Leftrightarrow 0 > 3(x^2+6x+5) \quad / \cdot \tfrac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 > x^2+6x+5 \Leftrightarrow 0 > (x+5)(x+1)$$

↳ Puntos críticos
$x=-5$
$x=-1$

Haciendo tabla de signos:

	$]-\infty,-5[$	-5	$]-5,-1[$	-1	$]-1,\infty[$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
	$(+)$		$(-)$		$(+)$

Nos queda entonces la solución final:

$$x \in \,]-5,-1[.$$