

Ayudame 2:

(1)

P1 Simplifique indicando restricciones

$$a) \frac{1}{1-a} \cdot \frac{(a^3-1)}{a^2-a+1} \cdot \frac{a^3+1}{a^2+a+1} + \frac{(a^2+11a+10)(a^3-3a^2+3a-1)(a^2+3a+2)}{(a^2-1)^2(a^2+9a-10)(a+2)}$$

sd: Primero, factorizamos:

$$= \frac{1}{(1-a)(1+a)} \cdot \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2-a+1} \cdot \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2+a+1} + \frac{(a+1)(a+10)(a-1)^3(a+2)(a+1)}{(a-1)^2(a+1)^2(a+10)(a-1)(a+2)}$$

De aquí, notamos que debe cumplirse que:

$$\begin{array}{l|l} \bullet (1-a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 & \bullet a+10 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -10 \\ \bullet 1+a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1 & \bullet a+2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2 \end{array}$$

Por lo que $a \in \mathbb{R} - \{ \pm 1, -10, -2 \}$

En cuanto a las expresiones cuadráticas, vemos que

$$a^2-a+1=0 \rightarrow \Delta = b^2-4ac = 1-4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$$

Por lo que no existe $a \in \mathbb{R}$ que anule esta expresión.

Lo mismo puede ser verificado para a^2+a+1 (hágalo!).

Por lo que no hay restricciones provenientes de estas expresiones.

$$\bullet \bullet \bullet a \in \mathbb{R} - \{ \pm 1, -10, -2 \}.$$

Ahora, simplifiquemos:

$$\frac{1}{(1-a)(1+a)} \cdot \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2-a+1} \cdot \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2+a+1} + \frac{(a+1)(a+10)(a-1)^3(a+2)(a+1)}{(a-1)^2(a+1)^2(a+10)(a-1)(a+2)}$$

$$= \frac{(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)}{(1-a)(1+a)(a^2-a+1)(a^2+a+1)} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

$$b) \frac{2-c}{c^2+c-6} + \frac{5}{9-c^2} - \frac{4-c}{c^2-7c+12} \quad (2)$$

Sal: primero, factorizamos:

$$= \frac{2-c}{(c+3)(c-2)} + \frac{5}{(3-c)(3+c)} - \frac{4-c}{(c-4)(c-3)}$$

y de aquí, vemos que se debe cumplir

$$a \in \mathbb{R} - \{ \pm 3, 2, 4 \}.$$

Ahora, simplificamos:

$$\overset{(-)}{\cancel{2-c}} \frac{(-)}{\cancel{(c-2)}} + \frac{5}{(3-c)(3+c)} - \overset{(-)}{\cancel{4-c}} \frac{(-)}{\cancel{(c-4)}} \frac{(-)}{(c-3)}$$

$$= \frac{5}{(3-c)(3+c)} - \frac{1 \overset{(-)}{(c-3)}}{\overset{(-)}{(c+3)} \cancel{(c-3)}} + \frac{1 \overset{(-)}{(c+3)}}{\overset{(-)}{(c-3)} \cancel{(c+3)}}$$

$$= \frac{5}{(3-c)(3+c)} - \frac{c-3}{(c+3)(c-3)} + \frac{c+3}{(c+3)(c-3)}$$

$$\overset{(-)}{5} \frac{(-)}{(3-c)(3+c)} + \frac{(c+3) - (c-3)}{(c+3)(c-3)}$$

$$= \frac{6}{(c+3)(c-3)} - \frac{5}{(c+3)(c-3)} = \frac{1}{(c+3)(c-3)}$$

P2 Determine verdadero o falso.

(3)

a) Sean $b, d \neq 0$. Luego, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Sol: verdadero

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \stackrel{\text{(def. fracciones)}}{\Leftrightarrow} a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1}$$

$$\stackrel{(\cdot bd)}{\Leftrightarrow} (a \cdot b^{-1})(bd) = (c \cdot d^{-1})(bd)$$

$$\stackrel{(\text{asoc.})}{\Leftrightarrow} a(b^{-1}b)d = c(d^{-1}d)b$$

$$\stackrel{(\text{inverso})}{\Leftrightarrow} a \cdot 1 \cdot d = c \cdot 1 \cdot b \stackrel{(\text{neutro})}{\Leftrightarrow} ad = bc \quad \square$$

b) Para todo $b \in \mathbb{R}$ se verifica que $\sqrt{b^2} = b$.

falso: con $b = -1$, tenemos

$$\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1.$$

c) si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$.

falso, con $x = 9, y = 16$, tenemos

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \neq \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

d) un $x \in \mathbb{R}$ cumple $x^8 - 256 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

$$\begin{aligned} \text{verdadero: } x^8 - 256 &= \cancel{x^8 - 2^8} \quad x^8 - 2^8 = (x^4 + 2^4)(x^4 - 2^4) \\ &= (x^4 + 16)(x^2 + 2^2)(x^2 - 2^2) = (x^4 + 16)(x^2 + 4)(x+2)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

La única forma de que esto se cumpla es $(x+2)(x-2) = 0$
 $\Leftrightarrow x = \pm 2 \quad \square$

Pr) en $\mathbb{R} - \{0\}$, podemos definir la siguiente operación: (4)

$$a \oplus b := \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad \left(\begin{array}{l} \text{En que es} \\ \text{la suma usual} \end{array} \right)$$

a) pruebe que $\oplus$ es conmutativo.

Dem: para $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, vemos que

$$a \oplus b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad \Bigg| \quad b \oplus a = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$$

y por conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$, estas dos coinciden:

$$a \oplus b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = b \oplus a \quad \square$$

b) muestre que $\oplus$ no es asociativa.

Efectivamente, la asociatividad significaría

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$

Pero con $a=1$ y $b=c=2$, tenemos

$$\bullet (1 \oplus 2) \oplus 2 = \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \oplus 2 = \frac{5}{2} \oplus 2 = \frac{5}{4} + \frac{4}{5} = \frac{41}{20}.$$

$$\bullet 1 \oplus (2 \oplus 2) = 1 \oplus (1+1) = 1 \oplus 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

y como no coinciden, la asociatividad no se cumple.