Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2023

Ayudantía 3
Orden en $\mathbb{R}$, raíz cuadrada, valor absoluto. Ecuaciones lineales y cuadráticas

14/04/2023

En este taller, analizaremos si se cumplen algunas proposiciones que involucran desigualdades, como también los conceptos de raíz cuadrada y valor absoluto en los números reales. En este proceso, aplicaremos axiomas de orden de los números reales junto con algunas propiedades, teniendo presente que si la proposición se considera verdadera debemos demostrarla y en caso contrario presentaremos un contraejemplo. Por otra parte, resolveremos problemas contextualizados que involucren ecuaciones lineales y cuadráticas.

Objetivos:

1. Aplicar axiomas y propiedades que involucran desigualdades, para demostrar una proposición cuando es verdadera.
2. Identificar las condiciones que se deben establecer para la existencia de raíces cuadradas.
3. Utilizar la definición de valor absoluto.
4. Resolver problemas de ecuaciónes lineales y cuadráticas.

Ejercicios Propuestos

1. Científicos testearon dos ciudades que se enfrentan a una misma pandemia, y observaron las siguientes resultados con respecto a la cantidad de enfermos:

   - En la primera ciudad, donde inicialmente habían 100 personas enfermas, por cada día se sumaban 20 enfermos.
   - En la segunda ciudad, donde inicialmente habían 160 personas enfermas, por cada día se sumaban 24 enfermos.

   Además, los científicos acotaron que si en la segunda ciudad se hubiesen tomado las medidas sanitarias pertinentes, la cantidad de enfermos adicionales por día se hubiese reducido un 25 %.

   Suponiendo que se hubiesen tomado las medidas sanitarias pertinentes en la segunda ciudad, ¿cuántos días debieran transcurrir para que la cantidad de enfermos de la primera ciudad fuese igual a la cantidad de enfermos de la segunda ciudad?

Solución: Consideremos a t como el tiempo medido en días, y sean

$$\begin{aligned} c_1 &: \text{Cantidad de enfermos en la ciudad 1} \\ c_2 &: \text{Cantidad de enfermos en la ciudad 2} \\ c_2' &: \text{Cantidad de enfermos en la ciudad 2 una vez} \\ &\quad \text{tomadas medidas sanitarias} \end{aligned}$$

En virtud del enunciado, en la primera ciudad, se tienen $100 + 20t$ enfermos para cada t, mientras que en la segunda ciudad hay $160 + 24t$ enfermos por cada día, vale decir

$$\begin{aligned} c_1 &= 100 + 20t \\ c_2 &= 160 + 24t \end{aligned}$$

Una vez tomadas las medidas sanitarias pertinentes en la ciudad 2 la cantidad de contagiados está dado por

$$c_2' = 160 + 0{,}75 \cdot 24t = 160 + 18t$$

De esta manera, para determinar cuántos días han de transcurrir para que la cantidad de enfermos en la primera ciudad sea igual a la cantidad de enfermos en la segunda una vez tomadas las medidas se tiene

$$\begin{aligned} c_1 = c_2' \quad &\iff \quad 100 + 20t = 160 + 18t \quad && / - 18t - 100 \\ &\iff \quad 2t = 60 && / \cdot 2^{-1} \\ &\iff \quad t = 30 \end{aligned}$$

Por lo tanto, han de transcurrir 30 días para presenciar tal escenario.

2. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera demuéstrela y en caso de ser falsa presente un contraejemplo.

   a) Si $-3 < \dfrac{1}{x}$ entonces $x < -\dfrac{1}{3}$.

   Solución: (**Contraejemplo**) Note que, si consideramos $x = 13$, entonces $-3 < \dfrac{1}{13}$. Sin embargo, para el mismo $x = 13$, se tiene $13 > -\dfrac{1}{3}$. Por lo tanto la proposición es falsa.

   b) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $|a - b| \leq |a| - |b|$.

   Solución: (**Contraejemplo**) Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$ dados por $a = 11$ y $b = -2$. Entonces,

$$\begin{aligned} |11 - (-2)| &\leq |11| - |-2| \\ |13| &\leq 11 - 2 \\ 13 &\leq 9 \end{aligned}$$

   Lo cual es falso. Por lo tanto la proposición es falsa.

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^2 + 3x + 3 \neq 0$.

Solución: (**Demostración**) Consideremos $x \in \mathbb{R}$ y notemos que

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 3 &= x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Además, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$, entonces podemos concluir que

$$x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Por lo tanto, en virtud de la ley de tricotomía, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3x + 3 \neq 0$.

d) Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Solución: (**Demostración**) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x > 0$ e $y > 0$, ahora dado que para cualquier real r se tiene que $r^2 \geq 0$, en particular para $x - y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &\geq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \qquad\qquad / + 4x \\ x^2 + 2xy + y^2 &\geq 4xy \\ (x+y)^2 &\geq 2^2 xy \end{aligned}$$

Luego, dado que todo es positivo se tiene

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Por lo tanto,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Note que la igualdad se satisface cuando $x = y$.

3. Considere una cartulina rectangular cuyos lados medidos en centímetros son $(x+4)$ y $(x+5)$, para algún número real x. Se ha decidido confeccionar una caja sin tapa y para ello, en cada esquina de la cartulina se ha cortado un cuadrado de área 25 centímetros cuadrados y se han doblado los lados hacia arriba como se muestra en la figura adjunta.

Si se desea que el área de la base de la caja sea de 30 centímetros cuadrados, ¿cuál debe ser el o los valor(es) de la medida x?

Solución: Sea $x \in \mathbb{R}$ con las condiciones presentadas en el enunciado. En primer lugar notemos que $x+4 > 10$ y $x+5 > 10$, de otra forma no podríamos considerar un cuadrado de área 25 [cm^2] en cada esquina. Es decir

$$\begin{aligned} x+4 > 10 \quad &\Rightarrow \quad x > 6. \\ x+5 > 10 \quad &\Rightarrow \quad x > 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de $x \in \mathbb{R}$ que estamos buscando es mayor que 6.

Ahora por otro lado, sabemos que el área de un rectángulo de las a y b está dada por $A_{\square} = ab$. En particular para nuestro caso, tenemos que la base de la caja en construcción corresponde a un rectángulo de lados $x-5$ y $x-6$, por lo cual una ecuación que modela la situación anterior podría ser

$$(x-5)(x-6) = 30.$$

Luego, resolviendo la ecuación obtenida, se tiene

$$\begin{aligned} (x-5)(x-6) = 30 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 11x + 30 = 30 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 11x = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x(x-11) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, dado que el producto de las expresiones es nula, se tiene que o bien

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \text{o} \quad x - 11 &= 0 \\ x &= 11. \end{aligned}$$

Finalmente, como el número buscado era mayor que 6, se concluye que $x = 11$, es decir la medida de x es 11 centímetros.