Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er.* semestre de 2023

Ayudantía 2
Manejo algebraico y Axiomática de números reales
24/03/2023

En este taller, trabajaremos la axiomática en que se rigen los números reales. Recordaremos las restricción que debe tener una expresión algebraica para que esté bien definido. Trabajaremos demostraciones y contraejemplos de proposiciones, según sea el caso. Por último, estudiaremos los axiomas de cuerpo bajo otra operación definida en $\mathbb{R}$ (distinta de las usuales).

Objetivos:

1. Identificar condiciones para que una expresión algebraica esté bien definida.
2. Trabajar demostraciones y contraejemplos.
3. Aplicar los axiomas de cuerpo.

Ejercicios Propuestos

1. Simplifique las siguientes expresiones indicando sus restricciones:

   a) $\dfrac{1}{1-a^2}\cdot\dfrac{a^3-1}{a^2-a+1}\cdot\dfrac{a^3+1}{a^2+a+1}+\dfrac{(a^2+11a+10)(a^3-3a^2+3a-1)(a^2+3a+2)}{(a^2-1)^2(a^2+9a-10)(a+2)}$.

   b) $\dfrac{2-c}{c^2+c-6}+\dfrac{5}{9-c^2}-\dfrac{4-c}{c^2-7c+12}$.

2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En cualquier caso, justifique demostrando o con un contraejemplo, respectivamente.

   a) Sean $b, d \neq 0$. Luego, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \iff ad = bc$.

   b) Para todo número real b se verifica que $\sqrt{b^2}=b$.

   c) Si x, y son números reales positivos, entonces $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$.

   d) Un número real x cumple que $x^8-256=0$ si, y solo si, $x=\pm 2$.

3. En el conjunto de los números reales distintos de cero podemos definir la siguiente operación:

$$a \oplus b := \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

donde el símbolo $+$ es la suma usual de $\mathbb{R}$.

a) Demuestre que la operación $\oplus$ es conmutativa.

b) Demuestre que la operación $\oplus$ no es asociativa.