**Universidad de Chile**
**Programa de Bachillerato**
**Matemáticas 1**
**1*er*. semestre de 2023**

# Ayudantía 2
# Manejo algebraico y Axiomática de números reales
**24/03/2023**

En este taller, trabajaremos la axiomática en que se rigen los números reales. Recordaremos las restricción que debe tener una expresión algebraica para que esté bien definido. Trabajaremos demostraciones y contraejemplos de proposiciones, según sea el caso. Por último, estudiaremos los axiomas de cuerpo bajo otra operación definida en $\mathbb{R}$ (distinta de las usuales).

**Objetivos:**

1. Identificar condiciones para que una expresión algebraica esté bien definida.
2. Trabajar demostraciones y contraejemplos.
3. Aplicar los axiomas de cuerpo.

## Ejercicios Propuestos

1. Simplifique las siguientes expresiones indicando sus restricciones:

*a)* $$\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{a^3-1}{a^2-a+1}\cdot\frac{a^3+1}{a^2+a+1}+\frac{(a^2+11a+10)(a^3-3a^2+3a-1)(a^2+3a+2)}{(a^2-1)^2(a^2+9a-10)(a+2)}.$$

**Solución:** Una buena manera de comenzar el ejercicio es analizar los denominadores de las fracciones anteriores, ya que si estos factores fueran igual a cero, las fracciones estarían indeterminadas. Luego, factorizando cada denominador obtenemos.

$$\begin{aligned} 1-a^2 &= (1-a)\cdot(1+a) \\ \left(a^2-1\right)^2 &= (a+1)^2\cdot(a-1)^2 \\ a^2+9a-10 &= (a+10)\cdot(a-1) \end{aligned}$$

Notemos que $(a+2)$ ya está escrito como producto de factores binomiales de grado uno. Además, recordemos que una expresión de la forma $x^2+bx+c$ lo podemos escribir como producto de factores binomiales de grado uno, cuando podemos encontrar números $p,q\in\mathbb{R}$ tales que $p+q=b$ y $p\cdot q=c$, si existen estos números podemos escribir:

$$x^2+bx+c=(x+p)\cdot(x+q)$$

Así, las expresiones $a^2+a+1$ y $a^2-a+1$ tendrían factorización si existieran $p, q, s$ y $t \in \mathbb{R}$, tales que

$$a^2+a+1=(a+p)\cdot(a+q) \qquad \text{y} \qquad a^2-a+1=(a+s)\cdot(a+t).$$

De donde en el primer caso, se tiene

$$\begin{aligned} a^2+a+1 &= (a+p)\cdot(a+q) \\ &= a^2+(p+q)\cdot a+pq \end{aligned}$$

Luego, igualando coeficientes se tiene

$$1=p+q \qquad \text{y} \qquad 1=pq.$$

Verificaremos si es posible encontrar estos valores, para ello consideremos la primera igualdad y elevamos al cuadrado,

$$\begin{aligned} 1^2 &= (p+q)^2 \\ 1 &= p^2+2(p\cdot q)+q^2 \end{aligned}$$

De la segunda igualdad se tiene $1=p\cdot q$, entonces, reemplazando se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= p^2+2(p\cdot q)+q^2 \\ 1 &= p^2+2\cdot(1)+q^2 \\ 1 &= p^2+2+q^2 \\ -1 &= p^2+q^2 \end{aligned}$$

Lo que es falso pues todo número al cuadrado es positivo y la suma de positivos es positivo, de manera que llegamos a una contradicción. Por lo cual, no existe factorización en dos binomios de grado 1, de forma similar se argumenta para $a^2-a+1$ concluyendo que no existen $s, t \in \mathbb{R}$ para los cuales la expresión se pueda factorizar.

En virtud de lo anterior se concluye que las expresiones $a^2+a+1$ y $a^2-a+1$ no contribuyen en las restricciones de la expresión, de hecho

$$a^2+a+1=\left(a+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4} \qquad \text{y} \qquad a^2-a+1=\left(a-\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}\,.$$

Por lo cual, podemos describir los valores para el cual la expresión no existe (restricciones de la expresión), como el conjunto de todos los

$$a \in \{-2,-1,1,-10\}$$

Luego, factorizando las expresiones de los numeradores se tiene,

$$\begin{aligned} a^3-1 &= (a-1)\cdot(a^2+a+1) \\ a^3+1 &= (a+1)\cdot(a^2-a+1) \\ a^2+11a+10 &= (a+1)\cdot(a+10) \\ a^3-3a^2+3a-1 &= (a-1)^3 \\ a^2+3a+2 &= (a+2)\cdot(a+1) \end{aligned}$$

Con lo cual, para todo $a$ distinto de $\{-10,-2,-1,1\}$ y reemplazando lo anterior en la expresión original, obtenemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{a^3-1}{a^2-a+1}\cdot\frac{a^3+1}{a^2+a+1}+\frac{(a^2+11a+10)(a^3-3a^2+3a-1)(a^2+3a+2)}{(a^2-1)^2(a^2+9a-10)(a+2)} \\
= \quad & \frac{1}{(1-a)(1+a)}\cdot\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2-a+1}\cdot\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2+a+1}+\frac{(a+1)(a+10)(a-1)^3(a+2)(a+1)}{(a^2-1)^2(a+10)(a-1)(a+2)} \\
= \quad & \frac{a-1}{1-a}+\frac{(a+1)^2(a-1)^3}{(a-1)(a+1)^2(a-1)^2} \\
= \quad & \frac{-(1-a)}{1-a}+1 \\
= \quad & -1+1 \\
= \quad & 0\,.
\end{aligned}
$$

*b*) $\dfrac{2-c}{c^2+c-6}+\dfrac{5}{9-c^2}-\dfrac{4-c}{c^2-7c+12}.$

**Solución:** Factorizando los denominadores tenemos,

$$
\begin{aligned}
c^2+c-6 &= (c-2)\cdot(c+3) \\
9-c^2 &= (3-c)\cdot(3+c) \\
c^2-7c+12 &= (c-3)\cdot(c-4)
\end{aligned}
$$

Así el conjunto de restricciones para la expresión corresponden al conjunto

$$\{-3,2,3,4\}.$$

Ahora, cosniderando las restricciones y reemplazando los productos en la expresión original se tiene,

$$
\begin{aligned}
\frac{2-c}{(c-2)(c+3)}+\frac{5}{(3-c)(3+c)}-\frac{4-c}{(c-3)(c-4)} &= \frac{(-1)(c-2)}{(c-2)(c+3)}+\frac{5}{(3-c)(3+c)}-\frac{(-1)(c-4)}{(c-3)(c-4)} \\
&= \frac{(-1)}{(c+3)}-\frac{5}{(c-3)(c+3)}-\frac{(-1)}{(c-3)} \\
&= \frac{(-1)\cdot(c-3)-5+(c+3)}{(c+3)(c-3)} \\
&= \frac{-c+3-5+c+3}{(c+3)(c-3)} \\
&= \frac{1}{c^2-9}\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente, para todo $c$ distinto de $\{-3,2,3,4\}$

$$\frac{(-1)\cdot(c-3)-5+(c+3)}{(c+3)(c-3)}=\frac{1}{c^2-9}\,.$$

2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En cualquier caso, justifique demostrando o con un contraejemplo, respectivamente.

   *a*) Sean $b, d \neq 0$. Luego, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc$.

   **Demostración:** En primer lugar, notemos que la afirmación considera el conectivo *si y solo si*, el cual podemos interpretar como la conjunción de dos afirmaciones:

   (i) $(\Rightarrow)$ Dados $b, d \neq 0$. Entonces,

   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad ad = bc.$$

   (ii) $(\Leftarrow)$ Dados $b, d \neq 0$. Entonces,

   $$ad = bc \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

   Ahora, sean $b, d \neq 0$ demostraremos primero la afirmación (i). Sabemos que

   $$\begin{aligned}
   \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad &\iff \qquad (ab^{-1}) = (cd^{-1}) \qquad\qquad \backslash \cdot (bd) \\
   &\iff \qquad (a \cdot b^{-1}) \cdot (b \cdot d) = (c \cdot d^{-1}) \cdot (b \cdot d) \\
   &\iff \qquad (a \cdot b^{-1}) \cdot (b) \cdot (d) = (c \cdot d^{-1}) \cdot (b) \cdot (d) .
   \end{aligned}$$

   Aplicando asociatividad tenemos,

   $$(a \cdot (b^{-1} \cdot b)) \cdot (d) = (c \cdot (d^{-1} \cdot b)) \cdot (d)$$

   Aplicando conmutatividad

   $$(a \cdot (b^{-1} \cdot b)) \cdot (d) = (c \cdot (b \cdot d^{-1})) \cdot (d)$$

   Por ultimo, por propiedad asociativa

   $$(a \cdot (b^{-1} \cdot b)) \cdot (d) = (c \cdot b) \cdot (d^{-1}) \cdot (d)$$

   concluyendo:

   $$\begin{aligned}
   (a \cdot (b^{-1} \cdot b)) \cdot (d) &= (c \cdot b) \cdot (d^{-1} \cdot d) \\
   a \cdot 1 \cdot d &= c \cdot b \cdot 1 \\
   ad &= cb.
   \end{aligned}$$

   Vale decir, dados $b, d \neq 0$, entonces,

   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad ad = bc.$$

Por otro lado, para demostrar (ii). Sean $b, d \neq 0$, tales que $(a \cdot d) = (b \cdot c)$. Luego, existen inversos multiplicativos $b^{-1}, d^{-1} \in \mathbb{R}$ tales que $(d^{-1} \cdot b^{-1}) \in \mathbb{R}$.

Utilizando conmutatividad $(b \cdot c) = (c \cdot b)$ y multiplicando $(d^{-1} \cdot b^{-1})$ a la igualdad anterior,

$$(a \cdot d) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) = (b \cdot c) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a \cdot d) \cdot (d^{-1}) \cdot (b^{-1}) = (c) \cdot (b) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1})$$

luego, aplicando la propiedad de asociatividad

$$(a \cdot d \cdot d^{-1}) \cdot (b^{-1}) = (c) \cdot (b \cdot d^{-1} \cdot b^{-1})$$

ahora, asociando los términos $(a \cdot d \cdot d^{-1}) = (a) \cdot (d \cdot d^{-1}))$, $(b \cdot d^{-1} \cdot b^{-1}) = ((b \cdot d^{-1}) \cdot b^{-1})$ y conmutamos $(b \cdot d^{-1}) = (d^{-1} \cdot b)$, se tiene

$$(a \cdot (d \cdot d^{-1})) \cdot (b^{-1}) = (c) \cdot ((d^{-1} \cdot b) \cdot b^{-1}).$$

Por ultimo, asociando $((d^{-1} \cdot b) \cdot b^{-1}) = (d^{-1} \cdot (b \cdot b^{-1}))$, concluyendo:

$$a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,.$$

Por lo tanto, dados $b, d \neq 0$. Entonces,

$$ad = bc \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

*b*) Para todo número real $b$ se verifica que $\sqrt{b^2} = b$.

**Contraejemplo:** si consideramos $b = -2$, se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{(-2)^2} &= \sqrt{(-2) \cdot (-2)} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2\,. \end{aligned}$$

*c*) Si $x, y$ son números reales positivos, entonces $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$.

**Contraejemplo:** si consideramos $x = 9$ e $y = 16$, obtenemos:

$$\begin{gathered} \sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16} \\ 3 + 4 \neq \sqrt{25} \\ 7 \neq 5 \end{gathered}$$

*d*) Un número real $x$ cumple que $x^8 - 256 = 0$ si, y solo si, $x = \pm 2$.

**Solución:** En primer lugar notemos que

$$x^8 = (x^4)^2 \qquad \text{y} \qquad 256 = 16^2\,,$$

luego, aplicando la diferencia de cuadrados, se tiene

$$\begin{aligned} x^8 - 256 = 0 \qquad &\iff \qquad (x^4-16)(x^4+16) = 0 \\ &\iff \qquad (x^2-4)(x^2+4)(x^4+8) = 0 \\ &\iff \qquad (x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16) = 0 \end{aligned}$$

Ahora, para anular el producto de factores basta con que uno de ellos sea nulo y notando que $x^2+4>0$ (pues es la suma de positivos) y del mismo modo $x^4+16>0$ nos queda que los únicos factores que se anulan en $\mathbb{R}$ son $(x+2)$ y $(x-2)$. Por lo tanto la afirmación es verdadera.

3. En el conjunto de los números reales distintos de cero podemos definir la siguiente operación:

$$a \oplus b := \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

donde el símbolo $+$ es la suma usual de $\mathbb{R}$.

*a*) Demuestre que la operación $\oplus$ es conmutativa.

**Demostración:** Sean $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, notemos que por un lado,

$$a \oplus b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ba}\,.$$

Además, por otro lado,

$$b \oplus a = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2+a^2}{ab}\,.$$

Ahora, dado que la suma y el producto son operaciones conmutativas en $\mathbb{R}$, $a^2+b^2 = b^2+a^2$ y $ab = ba$, de forma tal que se concluye que

$$a \oplus b = b \oplus a$$

Es decir, la operación $\oplus$ es conmutativa.

*b*) Demuestre que la operación $\oplus$ no es asociativa.

**Contraejemplo:** Notemos que

- $1 \oplus (2 \oplus 3) = 1 \oplus \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) = 1 \oplus \frac{13}{6} = \frac{1}{\frac{13}{6}} + \frac{\frac{13}{6}}{1} = \frac{6}{13} + \frac{13}{6} = \frac{205}{78}.$

- $(1 \oplus 2) \oplus 3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1}\right) \oplus 3 = \frac{5}{2} \oplus 3 = \frac{\frac{5}{2}}{3} + \frac{3}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{6} + \frac{6}{5} = \frac{61}{30}.$

Luego, los valores obtenidos son distintos, por lo que podemos asegurar que

$$1 \oplus (2 \oplus 3) \neq (1 \oplus 2) \oplus 3.$$

Por lo tanto, como conclusión, en el conjunto de los números reales $\oplus$ no es una operación asociativa.