Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2023

Solución Ayudantía 1
Álgebra básica y Conjuntos

17/03/2023

Nuestra primera ayudantía tratará sobre los conceptos fundamentales de los conjuntos. Calcularemos algunos conjuntos por extensión y los operaremos con otros que se describen por compresión. Aplicaremos la operatoria de conjuntos sobre los llamados *intervalos* y, finalmente, hallaremos diferencias entre las relaciones de pertenencia y contención. Además, se resolverán problemas básicos de álgebra.

Objetivos:

1. Resolver problemas de álgebra básica.
2. Identificar si un elemento pertenece o no a un conjunto dado.
3. Operar entre conjuntos cuyos elementos pueden ser descritos por extensión y/o comprensión.
4. Calcular operaciones entre intervalos.
5. Analizar diferencias entre las relaciones de pertenencia y de contención.

Ejercicios Propuestos

1. *a*) Indique si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Justifique

    - $x \cdot x = 2x$

      Solución: Por un lado si $x \in \{0, 2\}$ podemos notar que la propiedad es siempre válida, cabe mencionar que esta verdad nos limita a un universo pequeño. Ahora, si x representa cualquier número real basta considerar un valor, por ejemplo $x = 1$, para notar que la propiedad deja de ser valida siempre (pierde su universalidad) pues $1 \cdot 1 \neq 2 \cdot 1$.

    - $\dfrac{a+b}{a} = b$

      Solución: Notemos que la igualdad no es valida en general para cualquier número real:
      i) si $a = 0$ el miembro izquierdo carece de sentido;
      ii) si $a \neq 0$, por ejemplo $a = 1$, entonces $b = b + 1$ lo cual es falso en general.
      Lo anterior no quita que la propiedad se cumpla para algunos valores tanto de a como de b. Pero no basta con estos casos particulares para aceptar la propiedad en general.

- $(3b)^2 = 3b^2$

  Solución: Notemos que la propiedad es válida si $b \in \{0\}$, sin embargo para cualquier otro valor real de b la propiedad es falsa, pues ella implicaría verdades como:

$$\begin{array}{lcl} \text{si } b = \pm 1 & \Rightarrow & 9 = 3\,; \\ \text{si } b = \pm 2 & \Rightarrow & 36 = 12\,. \end{array}$$

- $a^2 + a = 3a^2$

  Solución: Si a representa un número real cualquiera la igualdad es falsa en general, pues basta considerar $a = 2$ y se tendría $2^2 + 2 = 3 \cdot 2^2$ lo cual es falso. Hacemos hincapié que esto no quiere decir que la propiedad no se cumpla para algunos valores, de hecho, si $a \in \{0, \frac{1}{2}\}$ la propiedad pasa a ser verdadera siempre.

b) Reducir la siguiente expresión:

$$\frac{5m+6}{2m} - \frac{7m+8}{5}.$$

Si m es un número real, ¿qué podemos decir de m?

Solución: En primer lugar, si $m \in \mathbb{R}$ la fracción $\frac{5m+6}{2m}$ representaría otro numero real siempre y cuando $m \neq 0$, pues en tal caso no existiría el inverso multiplicativo del número $2m$. Ahora, para reducir la expresión, aplicamos las reglas aritméticas de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{5m+6}{2m} - \frac{7m+8}{5} &= \frac{(5m+6)\cdot 5 - (7m+8)\cdot(2m)}{2m\cdot 5} \\ &= \frac{25m + 30 - 14m^2 - 16m}{10m} = \frac{-14m^2 + 9m + 30}{10m}\,. \end{aligned}$$

c) Determine para qué números reales a se cumple que x es también un número real, donde:

$$x = \frac{a-5}{a-4} - \frac{a+2}{a+4}.$$

Verifique con algunos valores de a.

Solución: En primer lugar, note que para valores de a podemos determinar un otro valor real de x salvo algunas excepciones, por ejemplo si $a = 5$ el valor correspondiente de x lo obtenemos reemplazando en la regla algebraica dada para x, vale decir,

$$\begin{array}{lcl} \text{si } \ a = 5 & \Rightarrow & x = \dfrac{5-5}{5-4} - \dfrac{5+2}{5+4} = -\dfrac{7}{9}\,. \\ \text{si } \ a = -2 & \Rightarrow & x = \dfrac{-2-5}{-2-4} - \dfrac{-2+2}{-2+4} = \dfrac{7}{6}\,. \\ \text{si } \ a = 0 & \Rightarrow & x = \dfrac{0-5}{0-4} - \dfrac{0+2}{0+4} = \dfrac{3}{4}\,. \end{array}$$

Ahora, si miramos en detalle la regla de asignación podemos notar, por ejemplo que si $a = 4$ el primer miembro deja de ser un número real, lo mismo ocurre con el valor $a = -4$. Salvo estos valores, para cualquier otro valor la expresión estará determinada, este hecho se sustenta en la existencia de inversos multiplicativos para todo real no nulo.

Podemos llegar a la misma conclusión operando la regla de asignación (reduciendo la expresión), en efecto

$$\begin{aligned} x &= \frac{a-5}{a-4} - \frac{a+2}{a+4} \\ &= \frac{(a-5)(a+4)-(a+2)(a-4)}{(a-4)(a+4)} = \frac{a-12}{(a-4)(a+4)}, \end{aligned}$$

del mismo modo podemos notar que la existencia de x está condicionada a que $a \neq -4$ y $a \neq 4$.

2. Considere los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 9 \ \text{ o } \ x \text{ es impar}\}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10 \ \text{ y } \ x \geq -8\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 5 < 10 \ \text{ o } \ x \leq 20\}, \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7 \ \text{ o } \ x \geq 22\}.$$

i) Dibuje los conjuntos A, B, C, y D sobre la recta numérica y decida la veracidad de las siguientes proposiciones:

Solución: En primer lugar, pasamos a describir los conjuntos A,B,C y D por extensión, en efecto

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} \mid x < 9 \text{ o } x \text{ es impar}\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x < 9\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es impar}\} \\ &= \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \cup \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,...\} \\ &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13,...\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{N} \mid x + 5 < 10 \text{ o } x \leq 20\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x + 5 < 10\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 20\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 20\} \\ &= \{1,2,3,4\} \cup \{1,2,3,...,19,20\} \\ &= \{1,2,3,...,19,20\}. \end{aligned}$$

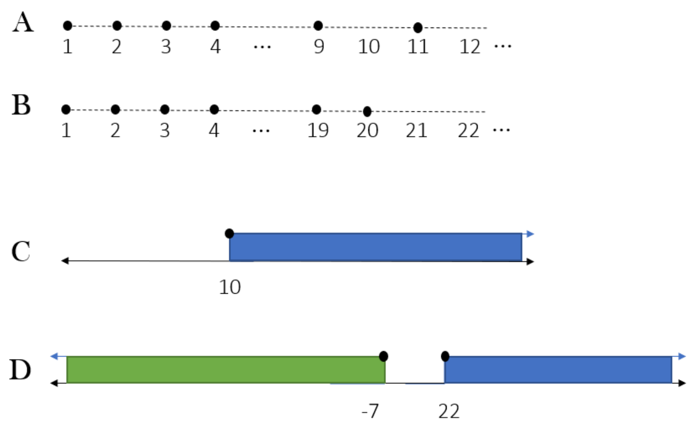
Además,

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10 \text{ y } x \geq -8\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\} \\ &= [10, \infty[. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7 \text{ o } x \geq 22\} \\ &=]-\infty, -7] \cup [22, \infty[. \end{aligned}$$

Cuyas representaciones sobre la recta numérica están dadas por



Por lo tanto,

a) $5 \in A$ (**Verdadera**)

b) $4 \in B$ (**Verdadera**)

c) $22 \in B$ (**Falsa**)

d) $9 \in C$ (**Falsa**)

e) $35 \in D$ (**Verdadera**)

f) $0 \in D$ (**Falsa**)

ii) Calcule las siguientes operaciones entre conjuntos:

a) $A \cap B$

b) $(A \cap C) - B$

c) $D \cup C$

Solución: En virtud de lo detallado anteriormente se tiene

a)

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}.$$

b) Primero determinamos el conjunto $A \cap C$, es decir,

$$\begin{aligned} A \cap C &= [\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, ...\}] \cap [10, \infty) \\ &= \{11, 13, 15, 17, 19, 21, ...\} \end{aligned}$$

y

$$\{11, 13, 15, 17, 19, 21, ...\} \setminus \{1, 2, 3, ..., 19, 20\} = \{21, 23, 25, ...\}$$

Por lo tanto,

$$(A \cap C) \setminus B = \{21, 23, 25, ...\}.$$

c)

$$\begin{aligned} D \cup C &= [(-\infty, -7] \cup [22, \infty)] \cup [10, \infty) \\ &= [(-\infty, -7] \cup [10, \infty)] \end{aligned}$$

3. Considere los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 7\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\} \quad \text{y} \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x\}.$$

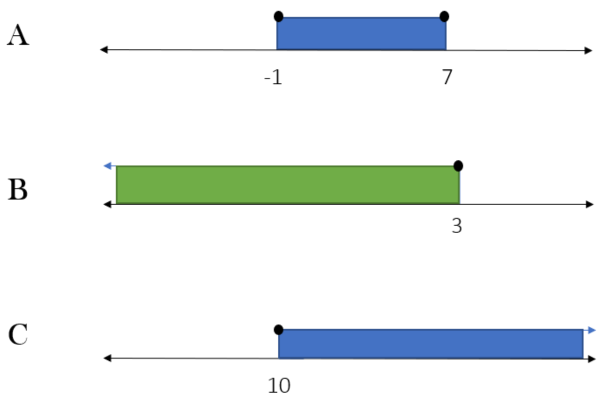
Por su naturaleza «*continua*», estos conjuntos son llamados *intervalos* (prontamente usaremos la notación estándar para referirnos a ellos) y **no pueden ser descritos por extensión**.
Sobre la recta numérica dibuje los conjuntos y calcule las siguientes operaciones entre intervalos:

a) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ b) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

Solución: Con notación de intervalos se tiene

$A = [-1, 7]$ $B = (-\infty, 3]$ $C = (-1, \infty)$.

Cuya representación en la recta real podría ser



Además,

a)

$$\begin{aligned}(A \cap C) \cup (B \cap C) &= ([-1, 7] \cap] - 1, \infty[) \ \cup \ (] - \infty, 3] \cap] - 1, \infty[) \\ &=] - 1, 7] \cup] - 1, 3] \\ &=] - 1, 7]\,.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(A \cup C) \cap (B \cup C) &= ([-1, 7] \cup] - 1, \infty[) \ \cap \ (] - \infty, 3] \cup] - 1, \infty[) \\ &= [-1, \infty[\cap \mathbb{R} \\ &= [-1, \infty[\,.\end{aligned}$$

4. Considere el conjunto $A = \big\{a,\ \{a, b\},\ \{a\},\ \{b\},\big\}$ de objetos matemáticos. Con el objetivo de diferenciar entre las relaciones de pertenencia y de contención, decida la veracidad de las siguientes proposiciones:

   a) $a \in A$
   Solución: Esta proposición es **verdadera**, pues es claro que $a \in A$.

   b) $b \in A$
   Solución: Esta proposición es **falsa**, pues es claro que $b \notin A$.

   c) $\{b\} \subseteq A$
   Solución: Esta proposición es **falsa**, porque $\{b\}$ no es subconjunto de A; pues b no pertenece a A (es decir, no cumple la definición de ser subconjunto de).

d) $\{b\} \in A$
Solución: Esta proposición es **verdadera**, porque $\{b\}$ es un elemento de A.

e) $\{a, b\} \subseteq A$
Solución: Esta proposición es **falsa**, pues $\{a, b\}$ no es subconjunto de A; más bien es un elemento de A.

f) $\{b\} \subseteq \{a, b\} \in A$
Solución: Esta proposición es **verdadera**; en efecto, dado que $b \in \{a, b\}$, entonces $\{b\} \subset \{a, b\}$ y $\{a, b\} \in A$ pues se en listó explícitamente.

g) $\varnothing \subseteq A$
Solución: Esta proposición es **verdadera** porque $\varnothing \subseteq A$ es una proposición verdadera para cualquier conjunto, en particular lo es para A.

*

* *"La esencia de la matemática reside en su libertad"*
George Cantor