Programa de Bachillerato
Matemáticas 1, curso F

Resolución Ayudantía N° 6

Ayudante: Maximiliano Aravena S.

26 de mayo de 2023 Tiempo: 90 minutos.

---

1. Solución:

a) Antes de resolver este problema mostraremos un ejemplo de función mal definida: La función raíz, con dominio $\mathbb{R}^+$ y codomonio $\mathbb{R}$. Así, está mal definida porque $\sqrt{4}$ puede resultar 2 o -2. Ó sea, una misma preimágen (el número 4) tiene dos imágenes (el 2 y el -2).

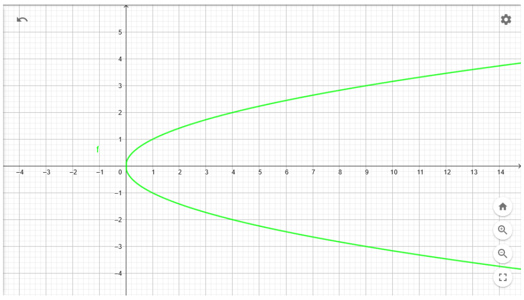


Figura 1: Función raíz cuadrada mal definida

Para que esté bien definida, restringimos a los reales positivos, así se define $\sqrt{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ y tenemos que para un x solo hay una raíz.

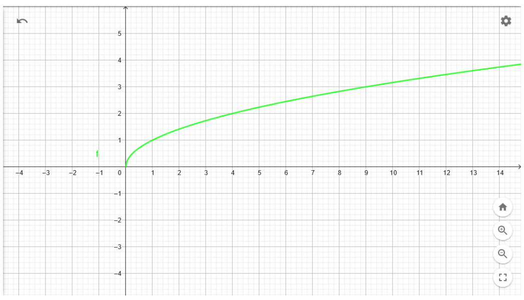


Figura 2: Función raíz bien definida

Dicho esto, una función está bien definida si para un preimagen obtengo una sola imagen. Ó sea, si tomo x_1, que tiene imagen $g(x_1)$ y x_2 que tiene imagen $g(x_2)$, y tenemos que $x_1 = x_2$ (ó sea, son el mismo número), debe suceder que $g(x_1) = g(x_2)$. En síntesis, la función g está bien definida si se cumple la siguiente hipótesis,

$$x_1 = x_1 \Longrightarrow g(x_1) = g(x_2). \tag{1}$$

Ahora resolvemos el problema: Primero, expresaremos la función g en su forma canónica y luego demostraremos la hipótesis (1).

$$\begin{aligned} g(x) &= -2x^2 + 8x - 2, \\ &= -2(x^2 - 4x + 1), \\ &= -2(x^2 - 4x + 1 + 3 - 3), \\ &= -2(x^2 - 4x + 4 - 3), \\ &= -2((x-2)^x - 3), \\ &= -2(x-2)^2 + 6. \end{aligned} \tag{2}$$

Finalmente, $g(x) = -2(x-2)^2 + 6$. Ahora, para demostrar (1) partimos de $x_1 = x_2$ y obtenemos la función g en su forma canónica en ambos lados:

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 \quad &\Longrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2, \\ &\Longrightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2, \\ &\Longrightarrow -2(x_1 - 2)^2 = -2(x_2 - 2)^2, \\ &\Longrightarrow -2(x_1 - 2)^2 + 6 = -2(x_2 - 2)^2 + 6, \\ &\Longrightarrow g(x_1) = g(x_2). \end{aligned} \tag{3}$$

En síntesis, $x_1 = x_2 \Longrightarrow g(x_1) = g(x_2)$, por lo que la función $g(x)$ está bien definida.

b) Ofrecemos dos métodos.

- **A partir de la forma canónica:** Tenemos que una función cuadrática en su forma canónica se expresa como $f(x) = a(x-h)+k$, donde si $a > 0$ la parábola tiene concavidad positiva, si $a < 0$ tiene concavidad negativa. Además, (h, k) es el vértice de la parábola y, por tanto, $x = h$ es su eje de simetría. En este caso, tenemos $g(x) = -2(x-2)^2 + 6$. Por lo que graf(g) es de concavidad negativa con vértice en $(2, 6)$.
- **A partir de la forma general:** Tenemos $g(x) = -2x^2 + 8x - 2$. Sabemos que graf(g) tiene concavidad negativa porque su coeficiente principal es menor a cero. Luego, las soluciones de $0 = -2x^2 + 8x - 2$ vienen dadas por:

  $$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{48}}{-4}. \tag{4}$$

  El punto medio entre soluciones es $x = 2$, por lo que el vértice es $(2, g(2))$, lo que es igual a $(2, 6)$.

Luego, con cualquiera de los dos métodos, se obtiene un esbozo como el siguiente gráfico:

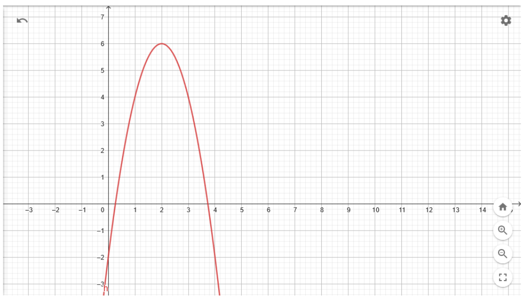


Figura 3: Función g(x)

c) La imagen son los valores que efectivamente toma la $g(x)$. En el gráfico, esto se observa en el eje vertical, para nuestro caso, la función toma cualquier negativo y los positivos hasta el 6. Por lo tanto, Im(g)=$(-\infty, 6]$, conjunto que no tiene mínimo pero si tiene máximo, el valor 6, que se obtiene para $x = 2$.

d) A partir de graf(g) notamos que si hay puntos de intersección, lo que podemos verificar con el discriminante pues es $48 > 0$. Esta intersección se da en las soluciones de $0 = -2x^2 + 8x - 2$, que ya calculamos y son,

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{48}}{-4}, \tag{5}$$

por lo que los puntos de intersección son los puntos $\left(\frac{-8-\sqrt{48}}{-4}, 0\right)$ y $\left(\frac{-8+\sqrt{48}}{-4}, 0\right)$.

2. Solución:

a) Expresaremos $f(x)$ como se solicita, para determinar los coeficientes:

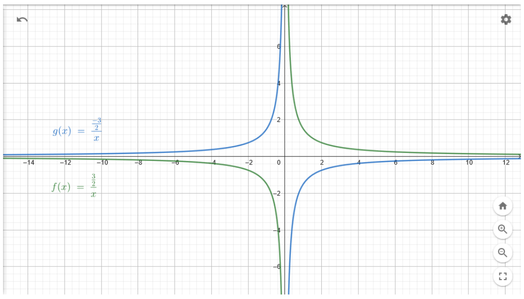
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{4x+31}{2x+14} &= \frac{4x+28+3}{2x+14}, \\ &= \frac{2(2x+14)+3}{2x+14}, \\ &= \frac{2(2x+14)}{2x+14} + \frac{3}{2x+14}, \\ &= 2 + \frac{3}{2x+14}, \\ &= 2 + \frac{3/2}{x+7}. \end{aligned} \tag{6}$$

Luego, $a = 3$, $h = -7$ y $k = 2$. Así que tenemos que,

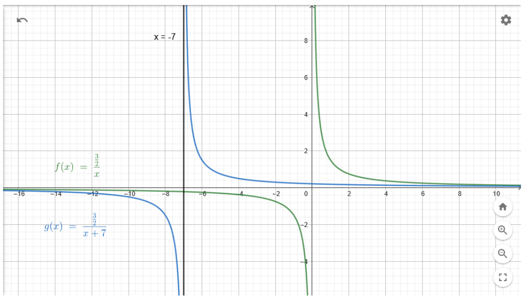
$$f(x) = 2 + \frac{3/2}{x+7}. \tag{7}$$

b) Como en la forma canónica de la función cuadrática, los términos a, h y k ayudan a graficar la función. Por este motivo, $f(x) = [a/(x-h)] + k$ es la forma canónica de las funciones racionales. Con ello, construiremos progresivamente graf(f):

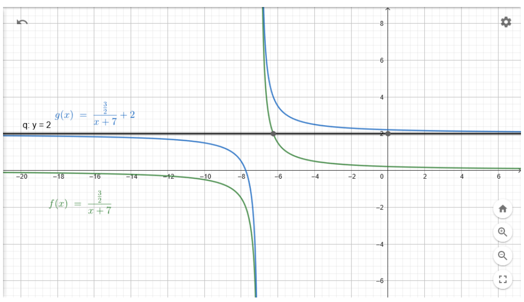
- el signo de a indica la orientación de la gráfica.



- h indica el el eje de simetría vertical. En la figura observamos como la función $(3/2)/x$ está centrada en $x = 0$ y $(3/2)/(x+7)$ está centrada en $x = -7$.

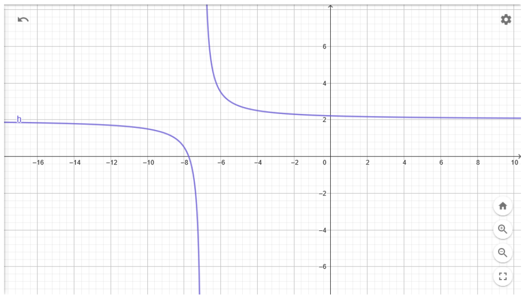


- k indica el eje de simetría horizontal. En la figura observamos como la función $(3/2)/(x+7)$ está centrada en $y = 0$ y $[(3/2)/(x+7)] + 2$ está centrada en $x = -7$.



Finalmente, graf(f) es el siguiente:

3. Solución:



a) P es la producción promedio anual de un árbol. Nos dicen que si hay 24 árboles en el terreno **cada uno** de ellos produce 600 manzanas al año, por lo tanto,

$$P(24) = 600. \tag{8}$$

Luego, por cada árbol extra **cada árbol** produce 12 manzanas menos al año, por lo que tenemos la siguiente progresión:

$$\begin{aligned} P(24) &= 600, \\ P(25) &= 600 - 12, \\ P(26) &= 600 - 24. \end{aligned} \tag{9}$$

Esto puede entenderse como $P(A) = 600 - 12A$. Ó sea, que la producción **de un solo árbol** cuando en el terreno hay A arboles adicionales es $600 - 12A$. Ahora, la cantidad de árboles adicionales es la diferencia entre la cantidad x de árboles totales y 24.

$$A = x - 24. \tag{10}$$

Luego, la producción **de un solo arbol** en función de la cantidad total de árboles en el terreno está dada por $P(x) = 600 - 12(x - 24)$. Desarrollando la multiplicación por -12 se obtiene,

$$P(x) = 888 - 12x. \tag{11}$$

Esta expresión no es válida para $x = 0$ porque si no hay arboles en el terreno entonces no hay producción. Además, $P(74) = 0$, por lo que si planto más árboles que eso tampoco hay producción. También, trabajamos con valores naturales porque la cantidad de manzanas y arboles son contables.

Finalmente, la función P queda definida de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ con la siguiente regla de asignación:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ 888 - 12x & si \quad 1 \leq x \leq 74 \\ 0 & si \quad x \geq 75 \end{cases} \tag{12}$$

b) Por como se definió, tenemos que un punto de la gráfica es el $(0, 0)$, el resto es la recta $888 - 12x$, pero solo tomando los puntos para $x \in \mathbb{N}$.

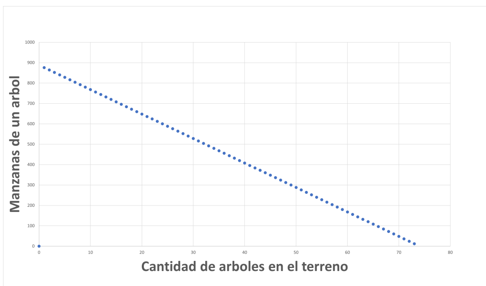


Figura 4: Producción manzanas de un árbol en función de la cantidad total de arboles

c) La producción total T del terreno es la producción de cada árbol multiplicada por la cantidad de arboles. Ó sea,

$$T(x) = P(x)x. \tag{13}$$

Luego,

$$T(x) = 888x - 12x^2. \tag{14}$$

Para esbozar el gráfico de T, debemos considerar dónde está definida la función, por lo que no es toda la parábola, si no que solo una parte de ella.

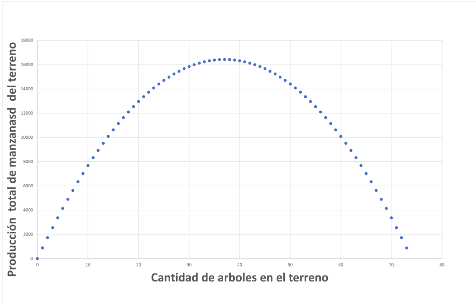


Figura 5: Producción total del terreno en función de la cantidad de arboles

d) Si para una cantidad N de arboles se producen 9516 manzanas al año, entonces

$$\begin{aligned} T(N) &= 9516, \\ 888N - 12N^2 &= 9516, \\ -12N^2 + 888N - 9516 &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Luego, resolviendo para N se obtienen dos soluciones, $N_1 = 13$ y $N_2 = 61$

e) La producción máxima de manzanas se puede determinar con el vértice de la parábola, lo determinaremos como el punto medio de las raices de $888x - 12x^2$.

$$0 = 888x - 12x^2 = -12x(x - 74) \iff x = 0 \vee x = 74 \tag{16}$$

Luego, el punto medio entre 0 y 74 es 37. Entonces, La producción máxima se da con 37 arboles en el terreno es de $g(37) = 16428$ manzanas.