Programa de Bachillerato
Matemáticas 1, curso F

Resolución Ayudantía N° 6

Ayudante: Maximiliano Aravena S.

12 de mayo de 2023 Tiempo: 90 minutos.

---

1. Solución:

a) El criterio de las raíces racionales establece que si un polinomio tiene raíz racional c/d, con c y d sin divisores en común, entonces el coeficiente libre del polinomio es múltiplo entero de c y el coeficiente principal del polinomio es múltiplo entero de d.
En este caso el polinomio es

$$P(x) = -9x^3 + 9x^2 + x - 2,$$

Por lo tanto,

- Para c: como su coeficiente constante es -2, este es múltiplo de $\{\pm 1, \pm 2\}$
- Para d: como su coeficiente principal es -9, este es múltiplo de $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$.

Así que sus candidatos a raíz racional son de la forma c/d. Ó sea, $\left\{\pm\frac{1}{9}, \pm\frac{2}{9}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm 1\right\}$. Se indica que la raíz racional pertenece a $]1/2, 1[$, la única opción posible $2/3$. Luego, evaluando $P(2/3)$,

$$\begin{aligned} P(2/3) &= -9 \cdot \tfrac{8}{27} + 9 \cdot \tfrac{4}{9} + \tfrac{2}{3} - 2, \\ &= -\tfrac{8}{3} + \tfrac{2}{3} + 2, \\ &= -\tfrac{6}{3} + 2, \\ &= -2 + 2, \\ &= 0, \end{aligned}$$

obtenemos que es solución.
Sabiendo que $2/3$ es solución de $P(x)$, por el teorema del factor tenemos que $P(x)$ es divisible[1] por $(x - 2/3)$. Por lo tanto,

$$P(x) = (x - 2/3)Q(x).$$

Para determinar el polinomio $Q(x)$, dividimos $P(x)$ en $(x - 2/3)$:

$$\begin{array}{l} \left(-9x^3 + 9x^2 + x - 2\right) : \left(x - \frac{2}{3}\right) = -9x^2 + 3x + 3 \\ \underline{\quad 9x^3 - 6x^2} \\ \qquad\quad 3x^2 + x \\ \qquad \underline{-3x^2 + 2x} \\ \qquad\qquad\quad 3x - 2 \\ \qquad\qquad \underline{-3x + 2} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Con esto,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 2/3)(-9x^2 + 3x + 3), \\ &= -9(x - 2/3)(x^2 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}) \end{aligned} \tag{1}$$

[1] Recuerde que la división de un polinomio dividendo $D(x)$ por un polinomio divisor $d(x)$, se escribe como $D(x) = d(x)q(x) + r(x)$, donde $q(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el resto. Además, se dice que $D(x)$ es divisible por $d(x)$ si el resto es el polinomio cero $r(x) = 0$.

Si $(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}) = 0$[2], entonces$P(x) = 0$, así que la raíces de ese polinomio cuadrático son también raíces de $P(x)$. Para determinarlas, utilizamos la formula general de soluciones de la ecuación cuadrática.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ &= \frac{1/3 \pm \sqrt{1/9 + 4/3}}{2}, \\ &= \frac{1/3 \pm \sqrt{13/9}}{2}, \\ &= \frac{1/3 \pm \sqrt{13}/3}{2}, \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}. \end{aligned}$$

Finalmente, $P(x)$ tiene tres raíces,

$$\begin{aligned} x_1 &= 2/3, \\ x_2 &= \frac{1 + \sqrt{13}}{6}, \\ x_3 &= \frac{1 - \sqrt{13}}{6}. \end{aligned}$$

b) Como ya determinamos las 3 raíces de $P(x)$ y tenemos la ecuación (1)

$$P(x) = -9 \left(x - \frac{2}{3} \right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right) \left(1 - \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \right).$$

2. Solución:

a) Que un polinomio sea divisible por otro, al igual que en el caso de la división entre números enteros, implica que el resto de la división sea 0. Por lo tanto, realizaremos la división correspondiente, obteniendo un resto[3] dependiente de a y b, el que igualaremos a 0 para determinar estos valores.

$$\begin{array}{l} (x^3 + ax^2 + bx + 5) : (x^2 + x + 1) = x + (a - 1) \\ \underline{-(x^3 + x^2 + x \qquad)} \\ \qquad (a-1)x^2 + (b-1)x + 5 \\ \quad \underline{-[(a-1)x^2 + (a-1)x + (a-1)]} \\ \qquad\qquad (b-a)x + 6 - a \end{array}$$

Tenemos entonces, que debe suceder que,

$$(b - a)x + 6 - a = 0.$$

Luego, por igualdad de polinomios[4] :

$$\begin{aligned} 0 &= b - a, \\ 0 &= 6 - a. \end{aligned}$$

Por lo que $a = b = 6$.

[2]Es importante factorizar por el coeficiente principal para poder hacer este paso con el polinomio mónico, así nos aseguramos que al finalizar obtenemos los mismos coeficientes y, por tanto, el polinomio deseado, y no solo uno que comparte algunas raíces.

[3]Recuerde, dejamos de dividir cuando hemos llegado a un polinomio de grado menor al del divisor. Como estamos trabajando con térmicos algebraicos como coeficientes (a y b), no obtendremos explícitamente 0 como resto sino que a una expresión a la que le impondremos la condición de ser igual a 0.

[4]Recuerde: $hx + j = mx + p$ si y solo si $h = m$ y $j = p$. En este caso, $0 = 0x + 0$.

b) Análogamente al ejercicio anterior, debemos realizar las divisiones de polinomios que correspondan e imponer las igualdades según las condiciones indicadas:

$$\begin{array}{l}
ax^2 + bx + 4 : x+2 = ax + (b-2a) \\
\underline{-(ax^2 + 2ax)} \\
\qquad (b-2a)x + 4 \\
\qquad \underline{-[(b-2a)x + 2(b-2a)]} \\
\qquad\qquad -2b+4a+4 \; //
\end{array}$$

Figura 1: división por $x+2$

$$\begin{array}{l}
ax^2 + bx + 4 : x+1 = ax + (b-a) \\
\underline{-(ax^2 + ax)} \\
\qquad (b-a)x + 4 \\
\quad \underline{-[(b-a)x + (b-a)]} \\
\qquad\qquad a-b+4 \; //
\end{array}$$

Figura 2: división por $x+1$

$$\begin{array}{l}
ax^2 + bx + 4 : x+3 = ax + (b-3a) \\
\underline{-(ax^2 + 3ax)} \\
\qquad (b-3a)x + 4 \\
\quad \underline{-[(b-3a)x + 3b - 9a)]} \\
\qquad\qquad 9a-3b+4 \; //
\end{array}$$

Figura 3: división por $x+3$

Entonces, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= -2b+4a+4, \\ a-b+4 &= 9a-3b+4. \end{aligned}$$

y se obtiene que $a = 1$ y $b = 4$.

3. Solución: Con los factores dados, sabemos que para que $P(x)$ sea mónico, de grado 3 entonces falta determinar otro factor lineal de raíz a:

$$P(x) = (x-2)(x-5)(x-a).$$

Luego,

$$P(x) = x^3 - (7+a)x^2 + (10+7a)x - 10a.$$

Dividiendo por $x+4$:

$$
\begin{array}{l}
x^3-(7+a)x^2+(10+7a)x-10a : x+4 = x^2-(11+a)x+(54+11a) \\
\underline{-(x^3+4x^2)} \\
\qquad -(11+a)x^2+(10+7a)x-10a \\
\qquad \underline{-[-(11+a)x^2-4(11+a)x]} \\
\qquad\qquad\qquad (54+11a)x-10a \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-[(54+11a)x+216+44a]} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -54a-216
\end{array}
$$

Teniendo el resto e imponiendo que sea igual a -54,

$$-54a-216=-54.$$

Ó sea, $a=-3$. Luego,

$$P(x)=x^3-4x^2-11x+30.$$

*