Programa de Bachillerato
Matemáticas 1, curso F

Resolución Ayudantía N° 3

Ayudante: Maximiliano Aravena S.

14 de abril de 2023 Tiempo: 90 minutos.

---

1. **Solución:** Se establecen las funciones $E_1(d)$ y $E_2(d)$ para modelar la cantidad de personas enfermas en las ciudades 1 y 2. Por como se describen los resultados, tenemos que la cantidad de enfermos totales en un día d el incremento de cada día multiplicado por la cantidad de días, y a eso le sumamos la cantidad inicial fija.

$$E_1(d) = 100 + 20d, \tag{1}$$

$$E_2(d) = 160 + 24d. \tag{2}$$

Si las medidas sanitarias se hubiesen tomado en la ciudad 2, su incremento diario seria un 25 % menor. Ó sea, pasaría de 24 a 18. Obtenemos entonces una función $E'(d)$, que modela la situación hipotética en que se tomaron las medidas sanitarias:

$$E_2'(d) = 160 + 18d. \tag{3}$$

Bajo estas condiciones, en algún día $d*$ ambas ciudades tienen igual cantidad de enfermos. Ó sea,

$$E_1(d*) = E_2'(d*). \tag{4}$$

Lo que se traduce en ,

$$100 + 20d* = 160 + 18d*. \tag{5}$$

Resolviendo esta ecuación para $d*$, se obtiene $d* = 30$. Es decir, en el día 30 ambas ciudades hubiesen tenido igual cantidad de personas enfermas si se hubiesen tomado las medidas sanitarias pertinentes en la ciudad 2.

2. **Solución:**

   a) Esta afirmación es falsa, como contraejemplo podemos tomar $x = 2$. En ese caso, se cumple que $-3 < 1/2$ pero no que $2 < -1/3$. Por lo tanto, hay al menos un caso en que $-3 < 1/x$ no implica que $x < -1/3$. En general, podría haberse usado cualquier $x > 0$ como contraejemplo.

   b) Esta afirmación es falsa. Tomamos como contraejemplo $a = 2$ y $b = -7$:

$$|2 - (-7)| = |2 + 7| = 9, \tag{6}$$

$$|2| - |-7| = |2| - |7| = -5. \tag{7}$$

   Ciertamente $9 \neq -5$ así que $|2 - (-7)| \neq |2| - |-7|$.

   c) Esta afirmación es verdadera. Se tiene demostrada la solución general de cualquier ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{8}$$

   En esta solución general el argumento de la raíz siempre debe ser mayor o igual a cero, en cuanto los números menores a cero no tienen raíz real.

$$b^2 - 4ac \geq 0. \tag{9}$$

   Esto no sucede para $a = 1$, $b = 3$ y $c = 3$, por lo que no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 3x + 3 = 0$.

d) Esta expresión es verdadera. Haremos el siguiente borrador:

$$\begin{aligned}
\tfrac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy}, \\
x+y &\geq 2\sqrt{xy}, \\
x^2+2xy+y^2 &\geq 4xy, \\
x^2-2xy+y^2 &\geq 0, \\
(x-y)^2 &\geq 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Eso es verdad, porque todo cuadrado es mayor o igual a cero. Ahora demostramos formalmente:

Se sabe que todo número real al cuadrado pertenece a los reales positivos. Como la resta de dos reales resulta un real,

$$(x-y)^2 \geq 0 \tag{11}$$

Desarrollando desde aquí,

$$\begin{aligned}
0 &\leq (x-y)^2, \\
0 &\leq x^2-2xy+y^2, \\
0 &\leq x^2+2xy+y^2+2xy, \\
4xy &\leq x^2+2xy+y^2, \\
4xy &\leq (x+y)^2, \\
2\sqrt{xy} &\leq |x+y|, \\
2\sqrt{xy} &\leq x+y, \\
\sqrt{xy} &\leq (x+y)/2
\end{aligned} \tag{12}$$

Nótese que $|x+y| = x+y$ solo porque se ha restringido que x e y son mayores a cero. Finalmente, queda demostrado que $(x+y)/2 \geq \sqrt{xy}$.

3. Solución: Para cortar los cuadrados de 25 centímetros cuadrados, cada arista original de la cartulina ha perdido 5 centímetros desde sus vértices. Ó sea, 10 centímetros en total. Por lo tanto, la base de la caja tiene aristas (x+4-10) y (x+5-10). Luego, el área A de la base de la caja está dada por,

$$A = (x-6)(x-5). \tag{13}$$

Deseamos que la base tenga 30 centímetros cuadrados de área,

$$30 = (x-6)(x-5). \tag{14}$$

Reexpresando,

$$30 = x^2 - 11x + 30, \tag{15}$$

Luego,

$$0 = x^2 - 11x = x(x-11). \tag{16}$$

Por lo que la ecuación se resuelve solo con $x = 0$ o $x = 11$. El caso $x = 0$ no tiene sentido, porque si la cartulina tiene aristas iniciales 4 y 5, no se puede recortar los cuadrados para construir la caja, así que lo descartamos. Con el caso $x = 11$, quedan aristas iniciales 15 y 16, por lo que sí es posible construir la caja.

En definitiva, para construir una caja de la forma mencionada y que su base tenga 30 centímetros cuadrados de área, se requiere que $x = 11$.

*